CINEMATICA

BERNARDO ARENAS GAVIRIA
Universidad de Antioquia
Instituto de Física

2011

Índice general

Capítulo 1

Cinemática

Competencias
En esta unidad se busca que el estudiante

- Identifique y defina los conceptos de sistema de referencia, partícula, vector posición, vector desplazamiento, vector velocidad, vector aceleración, velocidad radial, velocidad transversal, aceleración tangencial, aceleración normal, vector velocidad angular y vector aceleración angular.
- Analice el modelo físico-matemático, que permite describir el movimiento de los cuerpos tratados bajo el modelo de partícula.
- Opere adecuadamente con las cantidades físicas que permiten estudiar el movimiento de los cuerpos.
- Aplique los conceptos de la cinemática a situaciones físicas particulares.

CONCEPTOS BASICOS
En esta unidad de cinemática, se definirán los siguientes conceptos que son básicos en el estudio del movimiento de los cuerpos: Sistema de referencia, concepto de partícula, vector posición ($\mathbf{r}$), vector desplazamiento ($\Delta\mathbf{r}$), vector velocidad ($\mathbf{v}$), vector aceleración ($\mathbf{a}$), vector velocidad angular ($\boldsymbol{\omega}$), vector aceleración angular ($\boldsymbol{\alpha}$).

1.1. Introducción

La parte de la física que analiza el movimiento de los cuerpos, se conoce con el nombre de mecánica. La mecánica, a su vez, se divide en cinemática y dinámica. En esta unidad, se busca analizar los métodos matemáticos que describen el movimiento de los cuerpos, los cuales corresponden a la cinemática. El estudio de la dinámica, se inicia en la segunda unidad.

1.2. Sistemas de referencia

La frase *traer el cuerpo* A *que se encuentra a una distancia de* 2 m , es una frase incompleta, porque como se ilustra en la figura 1.1, puede haber muchos cuerpos a una distancia de 2 m entre sí. Esto lleva a la pregunta: ¿2 m a partir de qué o respecto a quién? Lo anterior muestra la necesidad de especificar un punto u observador de referencia respecto al cual se miden los 2 m. Por ello es más correcto decir: "Traer el cuerpo A que se encuentra a una distancia de 2 m respecto al observador B".

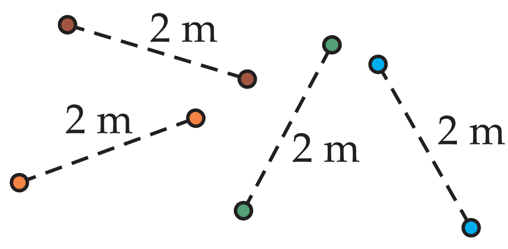


Figura 1.1: *Cuerpos separados entre sí por una distancia de* 2 m.

La frase anterior, aunque es menos ambigua, tampoco está completa ya que hay un conjunto muy grande de puntos ubicados a una distancia de 2 m respecto al observador B. Al unir este conjunto de puntos se obtiene una esfera de radio 2 m en el espacio tridimensional, y una circunferencia de radio 2 m en el plano como se muestra en la figura 1.2 para el caso bidimensional.

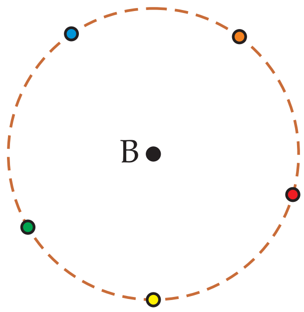


Figura 1.2: *Cuerpos a una distancia de* 2 m *respecto a B.*

Para definir con toda claridad la posición del cuerpo, se puede hacer la afirmación: *Traer el cuerpo* A *que se encuentra a una distancia de* 2 m *respecto a un observador* B*, de tal manera que la recta que une a* B *con* A *forma un ángulo* θ *con el eje* x*, tomado horizontalmente*. Esto equivale a decir que se ha adicionado un sistema de coordenadas al observador B, como se muestra en la figura 1.3, donde lo que realmente se ha definido es un sistema de referencia, que consiste en un observador al que se le ha asignado o ligado un sistema de coordenadas.

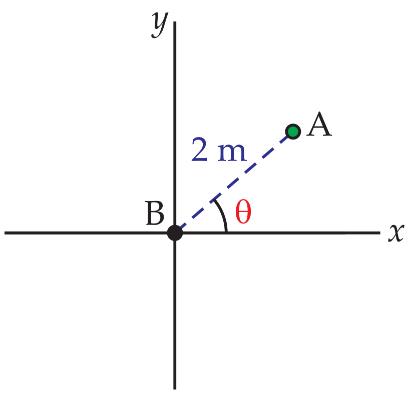


Figura 1.3: *Posición de A respecto a B.*

En la figura 1.3, debe quedar claro que se puede emplear bien sea el sistema de coordenadas cartesianas xy o el sistema de coordenadas polares r, θ, teniendo en cuenta las relaciones existentes entre ellas, como se vió en la unidad de vectores.

Por lo anterior, se puede concluir que para conocer con certeza la posición de un cuerpo es indispensable definir un punto de referencia, esto es, un sistema de referencia, ya que de lo contrario no tendría sentido la ubicación del cuerpo en consideración. Como se indica más adelante, para dar una descripción completa del movimiento de un cuerpo, se debe disponer de un cronómetro o reloj con el fin de poder conocer los instantes de tiempo en los que ocupa las diferentes posiciones.

Lo discutido anteriormente sólo es válido para el observador B, ya que si se cambia de observador, o lo que es equivalente, de sistema de referencia, necesariamente la posición del cuerpo sería completamente diferente.

De esta forma, el movimiento de un cuerpo puede definirse como un cambio continuo de su posición respecto a otro cuerpo, es decir, el movimiento de un cuerpo dado sólo puede expresarse en función de un sistema de referencia. Además, el movimiento del cuerpo A, respecto al cuerpo B, puede ser muy diferente al movimiento del cuerpo A respecto a otro cuerpo C.

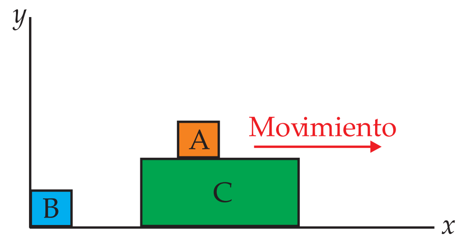


Figura 1.4: *A y C se mueven respecto a B.*

Suponga que un auto y su conductor, en reposo entre sí, se mueven sobre una pista recta hacia la derecha. Esta situación real, se modelará de tal forma que en la figura 1.4, el conductor es el cuerpo A, el auto el cuerpo C y un poste fijo al lado de la vía es el cuerpo B.

Los cuerpos A y C en reposo uno respecto al otro, se encuentran en movimiento hacia la derecha respecto al cuerpo B, como en la figura 1.4. Pero una situación diferente se presenta cuando se toma un sistema de referencia con origen en el cuerpo C, como se indica en la figura 1.5.

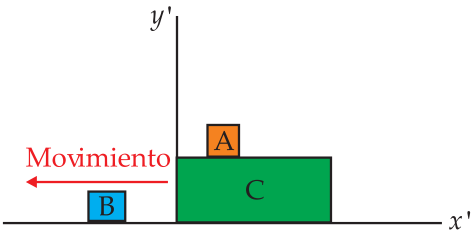


Figura 1.5: *B se mueve respecto a C, A no se mueve respecto a C.*

En este caso, el cuerpo A está en reposo respecto al cuerpo C y el cuerpo B en movimiento hacia la izquierda respecto al cuerpo C.

De acuerdo con lo anterior, cuando se quiere analizar el estado cinemático de un cuerpo, es necesario definir con toda claridad cuál es el sistema de referencia a utilizar, ya que como en la situación de la figura 1.4, el movimiento de A y C es hacia la derecha respecto al cuerpo B, mientras que para la situación de la figura 1.5, A está en reposo y B en movimiento hacia la izquierda respecto al cuerpo C.

Para obtener información completa sobre la forma como cambia la posición de un cuerpo respecto a otro, es necesario medir tiempos, o sea, que el observador debe disponer de un reloj o cronómetro, además del sistema de coordenadas.

De la situación anterior también se puede concluir que reposo y movimiento son conceptos relativos, ya que ambos dependen del sistema de referencia en consideración. Si un cuerpo está en movimiento respecto a algunos sistemas de referencia, simultáneamente puede estar en reposo respecto a otros sistemas de referencia, esto es, el movimiento es relativo.

En lo que sigue, se supone que se tiene un sistema de referencia bien definido. Los sistemas de referencia que se emplearán en adelante, se supone que están en reposo respecto a la tierra. Estos sistemas reciben el nombre de sistemas de referencia inerciales. En la unidad 2, se define de forma más concisa este tipo de sistemas de referencia, donde también se incluyen otros sistemas de referencia, que aunque estén en movimiento respecto a la tierra, cumplen la condición de ser inerciales.

Lo expuesto anteriormente para una dimensión, también es válido en el caso de dos y tres dimensiones.

Pregunta :
Por la ventana de un autobús, en movimiento respecto a una vía recta, un pasajero deja caer un cuerpo. ¿Cuál será el camino seguido por el cuerpo, respecto al pasajero? ¿Cuál será el camino seguido por el cuerpo, respecto a una persona que se encuentra sobre la vía?

A diario se observan cuerpos en movimiento, bien sobre la superficie de la tierra o a determinada altura respecto ella. El movimiento de estos cuerpos ocurre dentro de un gran mar de aire llamado atmósfera. El aire, el más común de los gases de la tierra, es una mezcla de gases conocidos, tales como: nitrógeno, oxígeno, bióxido de carbono, hidrógeno, etc.

Cuando se analiza el movimiento de un cuerpo, respecto a la superficie de la tierra, se obtienen los mismos resultados si este análisis se lleva a cabo respecto a un globo estático que se encuentra a determinada altura sobre la tierra.

La igualdad en los resultados, al tomar cualquiera de los sistemas de referencia anteriores, se debe a que la atmósfera terrestre está estática respecto a la tierra, es decir, que la gran masa de aire es arrastrada por la tierra en su movimiento de rotación. O sea, que cuando un cuerpo se eleva en el aire sigue sin separarse de la tierra ya que se mantiene ligado a su capa gaseosa la cual también toma parte en el movimiento de rotación de la tierra alrededor de su eje.

Debido a que el sistema tierra-aire gira como un todo, hace que arrastre consigo todo lo que en él se encuentra: las nubes, los aeroplanos, las aves en vuelo, etc. Si esto no ocurriera, los cuerpos en todo momento estarían sometidos a fuertes corrientes de aire. Situación que se puede presentar pero por razones físicas muy diferentes.

Necesariamente, cuando un cuerpo se mueve respecto a la tierra, bien sea sobre ella o a una altura determinada dentro de la atmósfera, estará sometido a los efectos del aire. Esta situación se percibe cuando se viaja en un auto con las ventanillas abiertas o cuando se deja caer verticalmente una hoja de papel. En ambos casos los cuerpos tienen un movimiento respecto al sistema aire.

En esta unidad, no se consideran los efectos del aire sobre el movimiento de los cuerpos. El análisis de esta situación se hace en la unidad 2.

1.3. Concepto de partícula

Se analiza la siguiente situación: Un bloque se desliza o traslada sobre una superficie horizontal sin cambiar su orientación ni su forma geométrica, es decir, se mueve como un todo de una posición a otra. En este caso, como se indica en la figura 1.6, los puntos A y B, pertenecientes al bloque, se mueven la misma distancia d.

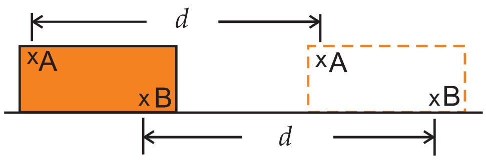


Figura 1.6: *Traslación pura de un cuerpo.*

Aunque sólo se han considerado los puntos A y B, es cierto que todos los puntos del bloque se mueven la misma distancia d.

Esto permite analizar el movimiento de solo un punto del bloque, ya que el comportamiento de él es idéntico al comportamiento de todos los demás puntos. Cuando es posible hacer la simplificación anterior, se dice que el cuerpo se ha reducido al modelo de una partícula. Posteriormente, se dará una definición más completa del concepto partícula.

En esta unidad se considera sólo el movimiento de traslación de los cuerpos, bien sea en línea recta o a lo largo de una curva; por ello el movimiento de los cuerpos se describe mediante el modelo de partícula.

1.4. Descripción de la cinemática de una partícula

1.4.1. Vector posición (r)

Para el caso de dos dimensiones, un cuerpo tratado bajo el modelo de partícula, se mueve a lo largo de un camino, también conocido como trayectoria. La posición de la partícula, en un instante determinado y respecto al sistema de referencia mostrado en la figura 1.7, está dada por el vector posición $\mathbf{r}$ trazado desde el origen del sistema de referencia hasta la posición donde se encuentre la partícula.

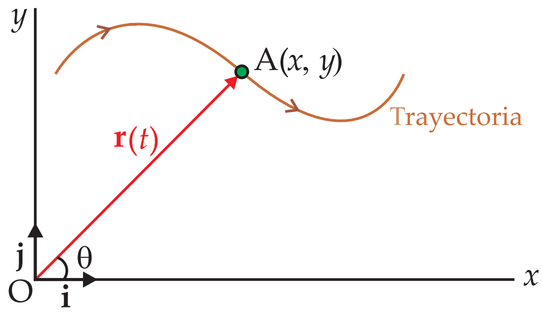


Figura 1.7: *Vector posición* $\mathbf{r}$ *de la partícula.*

Si el vector posición en componentes rectangulares está dado por $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, se tiene que su magnitud y dirección están dadas, respectivamente, por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}. \qquad (1.1)$$

La forma de las expresiones dadas por la ecuación (1.1) son válidas, en general, para obtener la magnitud y dirección de cualquier vector, si se conocen sus componentes rectangulares.

En la figura 1.7 se observa que el vector posición $\mathbf{r}$ varía con el tiempo tanto en magnitud como en dirección, mientras la partícula se mueve a lo largo de su trayectoria.

Ejemplo 1.1.
El vector posición de una partícula que se mueve en el plano xy, está dado por $\mathbf{r}(t) = (t-3)\mathbf{i} - (t^2 - 15)\mathbf{j}$, donde $\mathbf{r}$ está dado en m y t en s. Cuando $t_A = 2.50\,\text{s}$ la partícula pasa por el punto A. Determine:

a) Las coordenadas de la partícula en el punto A. b) La magnitud y dirección del vector posición en dicho instante.

Solución
a) Reemplazando $t_A = 2.50\,\text{s}$ en la expresión dada, se encuentra que el vector posición en componentes rectangulares, cuando la partícula pasa por el punto A, está dado por

$$\mathbf{r}_A = (-0.50\,\text{m})\mathbf{i} + (8.75\,\text{m})\mathbf{j}.$$

Como en el plano el vector posición en general se expresa en la forma $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, al comparar con la igualdad anterior se tiene que

$$x_A = -0.50\,\text{m} \qquad \text{y} \qquad y_A = 8.75\,\text{m},$$

que son las coordenadas de la partícula cuando pasa por el punto A.

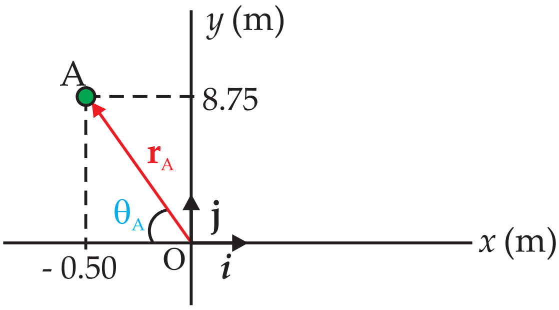
b) Utilizando las ecuaciones (1.1), se encuentra que la magnitud y dirección del vector posición están dadas por

$$r_A = 8.76\,\text{m} \qquad \text{y} \qquad \theta_A = 86.73^\circ.$$

Así, el vector posición se puede expresar en la forma

$$\mathbf{r}_A = 8.76\ \text{m} \measuredangle 86.73^\circ$$

El siguiente diagrama es una representación gráfica de los resultados obtenidos.



Ejercicio 1.1.
El vector posición de una partícula que se mueve en el plano xy, está dado por $\mathbf{r}(t) = (t-3)\mathbf{i} - (t^2 - 15)\mathbf{j}$ donde $\mathbf{r}$ está dado en m y t en s. a) Encuentre la ecuación de la trayectoria seguida por la partícula. De acuerdo con su resultado, ¿qué trayectoria describe la partícula? b) Halle el instante en el cual la partícula pasa por el eje x y el instante cuando pasa por el eje y . c) Obtenga el vector posición de la partícula en el instante $t = 0$.

Ejercicio 1.2.
El vector posición de una partícula que se mueve en el plano xy, está dado por $\mathbf{r} = (2t^2 - 1)\mathbf{i} - (t^3 + 2)\mathbf{j}$ donde $\mathbf{r}$ está dado en m y t en s. Cuando $t_A = 2.50\,\text{s}$ la partícula pasa por el punto A. Determine: a) Las coordenadas de la partícula en el punto A. b) La magnitud y dirección del vector posición en dicho instante.

1.4.2. Vector desplazamiento ($\Delta\mathbf{r}$)

Como se indica en la figura 1.8, se considera una partícula que en el instante t_A pasa por el punto A, definido por el vector posición $\mathbf{r}_A$. Si en un cierto tiempo posterior t_B ($t_B > t_A$) la partícula pasa por el punto B, definido mediante el vector posición $\mathbf{r}_B$, el *vector desplazamiento*, que describe el cambio de posición de la partícula conforme se mueve de A a B, es dado por

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \\ &= (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

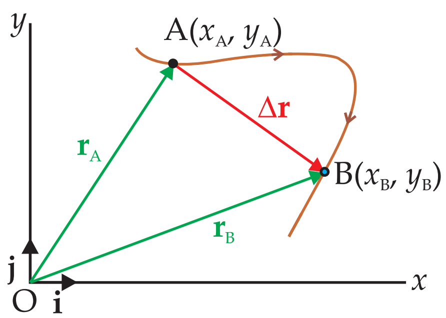


Figura 1.8: *Vector desplazamiento* $\Delta\mathbf{r}$ *entre A y B.*

Ejemplo 1.2.
Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r}(t) = (t-3)\mathbf{i} - (t^2 - 15)\mathbf{j}$ se encuentra en el punto A en $t_A = 2.50\,\text{s}$. Si en el tiempo $t_B = 4.00\,\text{s}$ pasa por el

punto B, calcule la magnitud y dirección del vector desplazamiento entre A y B.

Solución

Al reemplazar $t_{\mathrm{A}} = 2.50\,\mathrm{s}$ y $t_{\mathrm{B}} = 4.00\,\mathrm{s}$ en la expresión dada, se encuentra que los vectores posición de la partícula, en componentes rectangulares, respectivamente están dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\mathrm{A}} &= (-0.50\,\mathrm{m})\mathbf{i} + (8.75\,\mathrm{m})\mathbf{j},\\ \mathbf{r}_{\mathrm{B}} &= (1.00\,\mathrm{m})\mathbf{i} - (1.00\,\mathrm{m})\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Ahora, utilizando la ecuación (1.2), para este caso se tiene que el vector desplazamiento, entre A y B, en componentes rectangulares está dado por

$$\Delta\mathbf{r} = (1.50\,\mathrm{m})\mathbf{i} - (9.75\,\mathrm{m})\mathbf{j}.$$

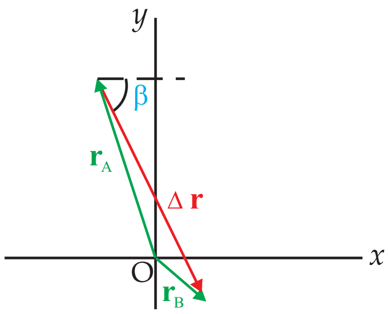
Por último, utilizando las ecuaciones (1.1), se encuentra que la magnitud y dirección del vector desplazamiento están dadas por

$$\Delta r = 9.86\ \mathrm{m} \qquad \text{y} \qquad \beta = 81.25^{\mathrm{o}},$$

es decir

$$\mathbf{r}_{\mathrm{A}} = 9.86\ \mathrm{m} \ \measuredangle\ 81.25^{\circ}$$

En el diagrama siguiente se muestra, tanto el vector desplazamiento como el ángulo que forma con la horizontal.



Ejercicio 1.3.

Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r} = (2t^2 - 1)\mathbf{i} - (t^3 + 2)\mathbf{j}$, donde $\mathbf{r}$ está dado en m y t en s, se encuentra en el punto A en $t_{\mathrm{A}} = 2.50\,\mathrm{s}$. Si en el tiempo $t_{\mathrm{B}} = 4.00\,\mathrm{s}$ pasa por el punto B, calcule la magnitud y dirección del vector desplazamiento entre A y B.

1.4.3. Vector velocidad (v)

Cuando la posición de una partícula cambia con respecto al tiempo, se dice que la partícula ha adquirido una velocidad. En general, la velocidad de una partícula se define como la rapidez con que cambia de posición al transcurrir el tiempo.

1.4.4. Vector velocidad media ($\bar{\mathbf{v}}$)

De acuerdo con la figura 1.9, se considera una partícula que en el instante t_{A} pasa por el punto A, determinado por el vector posición $\mathbf{r}_{\mathrm{A}}$. Si en un tiempo posterior t_{B} ($t_{\mathrm{B}} > t_{\mathrm{A}}$) la partícula pasa por el punto B, determinado por el vector posición $\mathbf{r}_{\mathrm{B}}$, la *velocidad media* durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}$, se define como el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo correspondiente, es decir

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &\equiv \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_{\mathrm{B}} - \mathbf{r}_{\mathrm{A}}}{t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}}\\ &= \frac{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\mathbf{i} + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})\mathbf{j}}{t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}}\\ &= \bar{v}_x\mathbf{i} + \bar{v}_y\mathbf{j}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

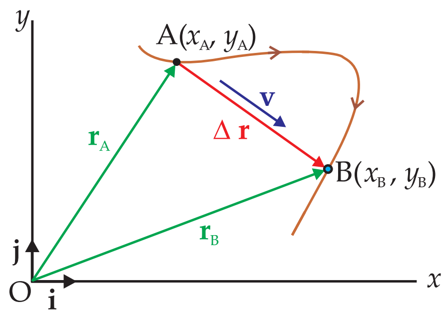


Figura 1.9: *Vector velocidad media entre A y B.*

Dimensiones y unidades del vector velocidad media

De acuerdo con la ecuación (1.3), las dimensiones del vector velocidad media y en general de la velocidad, son LT^{-1} . Por consiguiente, las unidades son $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ en el sistema SI, $\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ en el sistema gaussiano, $\mathrm{p} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ en el sistema Inglés; y en general, cualquier unidad de longitud dividida por una unidad de tiempo, tal como $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.

La definición (1.3) muestra que la velocidad media, $\bar{\mathbf{v}}$, es un vector ya que se obtiene al dividir el vector $\Delta\mathbf{r}$ entre el escalar Δt, por lo tanto, la velocidad media incluye tanto magnitud como dirección. Donde su magnitud está dada por $|\Delta\mathbf{r}/\Delta t|$ y su dirección por por la dirección del vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$. Esta cantidad es una velocidad media, ya que la expresión no dice cómo fue el movimiento entre A y B. La trayectoria pudo haber sido curva o recta, el movimiento pudo haber sido continuo o variable.

La siguiente es una situación en la que el vector velocidad media es nulo. En la figura 1.10, un auto parte del punto A y pasando por el punto B regresa al punto A, luego de un tiempo Δt . En este caso, la velocidad media es cero ya que el desplazamiento de la partícula es cero, aunque la distancia recorrida dada por la longitud de la curva, es diferente de cero.

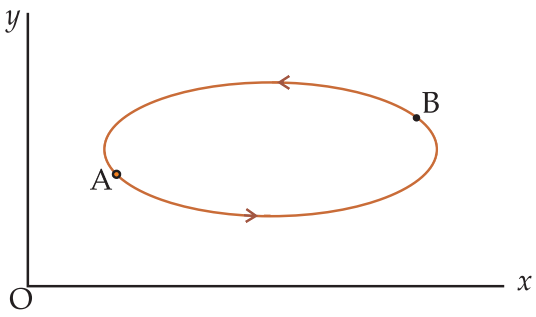


Figura 1.10: *Vector desplazamiento nulo.*

Ejemplo 1.3.
Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r}(t) = (t-3)\mathbf{i} - (t^2-15)\mathbf{j}$, se encuentra en el punto A en $t_A = 2.50\,\mathrm{s}$. Si en el tiempo $t_B = 4.00\,\mathrm{s}$ pasa por el punto B, determine la magnitud y dirección de la velocidad media entre A y B.

Solución
Obteniendo el vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ y sabiendo que $\Delta t = 1.5\,\mathrm{s}$, mediante la ecuación (1.3), se encuentra que la velocidad media en componentes rectangulares está dada por

$$\bar{\mathbf{v}} = (1.00\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\mathbf{i} - (6.5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\mathbf{j}.$$

Mediante las ecuaciones (1.1), para este caso se encuentra que la magnitud y dirección del vector velocidad media, correspondientes, son

$$\bar{v} = 6.58\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \quad \text{y} \quad \beta = 81.25^{\circ}$$

o sea

$$\bar{\mathbf{v}} = 6.58\ \mathrm{m\,s^{-1}} \ \measuredangle\ 81.25^{\circ}$$

que es la misma dirección del vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$, como se esperaba.

Ejercicio 1.4.
Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r}(t) = (t-3)\mathbf{i} - (t^2-15)\mathbf{j}$, se encuentra en el punto A en el instante t_A. Si en el tiempo t_B pasa por el punto B, demuestre que la velocidad media cuando la partícula pasa del punto A al punto B, está dada por $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{i} - (t_B + t_A)\mathbf{j}$.

Ejercicio 1.5.
Una partícula cuyo vector posición está dado por $\mathbf{r} = (2t^2-1)\mathbf{i} - (t^3+2)\mathbf{j}$, se encuentra en el punto A en $t_A = 2.50\,\mathrm{s}$. Si en el tiempo $t_B = 4.00\,\mathrm{s}$ pasa por el punto B, calcule la magnitud y dirección del vector desplazamiento entre A y B.

Ejemplo 1.4.
La velocidad media cuando una partícula pasa del punto A al punto B, está dada por $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{i} - (t_B + t_A)\mathbf{j}$. Obtenga la magnitud y dirección de la velocidad media, cuando la partícula se mueve durante los intervalos de tiempo mostrados en la tercera columna de la tabla 1.1.

Solución
En la tabla 1.1 se muestran los valores obtenidos para la magnitud ($\bar{v}$) y la dirección (θ) del vector velocidad media, en diferentes intervalos de tiempo (Δt) con

$t_{\mathrm{B}} = 3.0\,\mathrm{s}$.

$t_{\mathrm{A}}(\mathrm{s})$	$t_{\mathrm{B}}(\mathrm{s})$	$\Delta t(\mathrm{s})$	$\bar{v}(\mathrm{m/s})$	$\theta(^o)$
2.980000	3.0	0.020000	6.060000	80.50000
2.990000	3.0	0.010000	6.070000	80.52000
2.995000	3.0	0.005000	6.078000	80.53000
2.998000	3.0	0.002000	6.081000	80.53400
2.999000	3.0	0.001000	6.082000	80.53600
2.999500	3.0	0.000500	6.082300	80.53690
2.999800	3.0	0.000200	6.082600	80.53740
2.999900	3.0	0.000100	6.082700	80.53750
2.999990	3.0	0.000010	6.082750	80.53766
2.999995	3.0	0.000005	6.082758	80.53767

Pregunta
¿Qué puede concluir al observar los valores de las tres últimas columnas de la tabla 1.1?

Ejercicio 1.6.
Para una partícula, el vector posición en función del tiempo está dado por $\mathbf{r} = (2t^2 - 1)\mathbf{i} - (t^3 + 2)\mathbf{j}$, donde $\mathbf{r}$ está dado en m y t en s. a) Si la partícula pasa por el punto A en el instante t_{A} y por el punto B en el instante t_{B} , halle el vector velocidad media en sus componentes rectangulares. b) Obtenga la magnitud y dirección de la velocidad media, cuando la partícula se mueve durante los intervalos de tiempo mostrados en la tercera columna de la tabla 1.1.

1.4.5. Vector velocidad instantánea (v)

La velocidad instantánea, es la velocidad de una partícula en un instante cualquiera. *La velocidad, respecto a determinado sistema de referencia, puede variar bien sea porque cambia sólo su magnitud ó sólo su dirección ó simultáneamente cambian tanto su magnitud como su dirección.*

Para el movimiento de una partícula, representado en la figura 1.11, ¿cómo se puede determinar su velocidad en el punto A?

Al considerar las posiciones intermedias de la partícula en t'_2 , t''_2 , t'''_2 , determinadas por los vectores posición $\mathbf{r}'_2$, $\mathbf{r}''_2$, $\mathbf{r}'''_2$, se observa que los vectores desplazamiento $\Delta\mathbf{r}'$,$\Delta\mathbf{r}''$, $\Delta\mathbf{r}'''$, cambian tanto en magnitud como en dirección, o sea que la velocidad media varía tanto en magnitud como en dirección al tener en cuenta los puntos entre A y B.

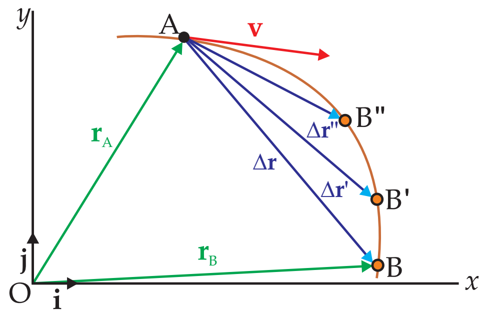


Figura 1.11: *Vector velocidad instantánea.*

Igualmente, los intervalos de tiempo correspondientes $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta t' = t'_2 - t_1$, $\Delta t'' = t''_2 - t_1$, $\Delta t''' = t'''_2 - t_1$, cada vez se hacen más pequeños.

Si se continúa este proceso haciendo que B se aproxime al punto A, el vector desplazamiento se hace cada vez más pequeño hasta que tiende a una dirección límite, que corresponde a la de la tangente a la trayectoria de la partícula en el punto A. Este valor límite de $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ se conoce como *velocidad instantánea* en el punto A, o sea, la velocidad de la partícula en el instante de tiempo t_{A} .

Si $\Delta\mathbf{r}$ es el desplazamiento en un pequeño intervalo de tiempo Δt , a partir de un tiempo t_{o}, la velocidad en un tiempo posterior t , es el valor al que tiende $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ cuando tanto $\Delta\mathbf{r}$ como Δt, tienden a cero, es decir,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

La ecuación (1.4) no es más que la definición de derivada, esto es

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.5}$$

Por la ecuación (1.5), se concluye que la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria seguida por la partícula. La magnitud de la velocidad se llama rapidez y es igual a

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|.$$

Como $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, se tiene que en componentes rectangulares

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}\\ &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Si en la figura 1.12, se conocen las componentes rectangulares, se tiene que su magnitud y dirección están dadas por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad \text{y} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x}.$$

De acuerdo con la definición del vector velocidad instantánea, se tiene que sus dimensiones y unidades son las mismas del vector velocidad media.

En adelante, siempre que se hable de velocidad, se hace referencia a la velocidad instantánea.

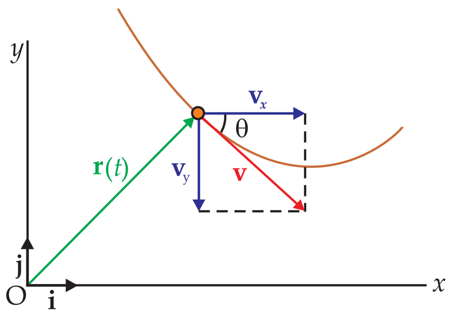


Figura 1.12: *Componentes rectangulares del vector velocidad.*

Partiendo de la definición del vector velocidad, es posible conocer el vector posición de una partícula si se conoce la forma como varía el vector velocidad con el tiempo.

De la ecuación (1.5) se obtiene que

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \int_{t_o}^{t} \mathbf{v}(t)\mathrm{d}t. \qquad (1.6)$$

Mientras no se conozca la forma como varía el vector velocidad ($\mathbf{v}(t)$) con el tiempo, no es posible resolver la integral de la ecuación (1.6).

Un caso particular se presenta cuando el vector velocidad permanece constante en magnitud y dirección. Cuando ello ocurre, la ecuación (1.6) se transforma en

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}(t - t_o). \qquad (1.7)$$

La ecuación (1.7) corresponde a un movimiento conocido como movimiento rectilíneo uniforme, ya que al no cambiar la dirección de la velocidad, la trayectoria es rectilínea y al no cambiar la magnitud de la velocidad su rapidez es constante. Este caso particular de movimiento se considerará más adelante.

Ejemplo 1.5.
El vector posición de una partícula que se mueve en el plano xy, está dado por $\mathbf{r}(t) = (t-3)\mathbf{i} - (t^2 - 15)\mathbf{j}$, donde $\mathbf{r}$ está dado en m y t en s. Determine la velocidad de la partícula, magnitud y dirección, en el instante $t = 3\,\mathrm{s}$.

Solución
Empleando la ecuación (1.5) se tiene que la velocidad en cualquier instante de tiempo t está dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2t\mathbf{j}.$$

Reemplazando $t = 3\,\mathrm{s}$ en la expresión para $\mathbf{v}$, se tiene que el vector velocidad en componentes rectangulares está dado por

$$\mathbf{v} = (1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\mathbf{i} - (6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\mathbf{j}.$$

Así que su magnitud y dirección están dadas respectivamente por

$$v = 6.083\,\mathrm{m}\cdot s^{-1} \qquad \text{y} \qquad \theta = 80.54^{\mathrm{o}},$$

es decir

$$\mathbf{v} = 6.083\ \mathrm{m.s^{-1}} \searrow 80.54^{\circ}$$

Pregunta
Compare este resultado con los valores de la tabla 1.1 en el ejemplo 1.4. ¿Qué puede concluir?

Ejercicio 1.7.
El vector posición de una partícula que se mueve en el plano xy, está dado por

$\mathbf{r} = (2t^2 - 1)\mathbf{i} - (t^3 + 2)\mathbf{j}$ donde $\mathbf{r}$ está dado en m y t en s. Determine la velocidad de la partícula, magnitud y dirección, en el instante $t = 3\,\text{s}$. Compare el resultado con lo obtenido en el ejercicio 1.6.

Ejemplo 1.6.
Si la velocidad de una partícula está dada por $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$, halle el vector posición de la partícula en el instante de tiempo t, sabiendo que partió de una posición en la cual $\mathbf{r}_o = -(3.0\,\text{m})\mathbf{i} + (15\,\text{m})\mathbf{j}$ en $t_o = 0$.

Solución
Reemplazando los vectores $\mathbf{r}_o$ y $\mathbf{v}$ en la ecuación (1.6), se encuentra que al integrar, evaluar y simplificar, el vector posición de partícula está dado por

$$\mathbf{r} = (t - 3)\mathbf{i} - (t^2 - 15)\mathbf{j},$$

que es el mismo vector posición considerado en el ejemplo 1.1. De este resultado, se puede concluir que si se conoce el vector posición de una partícula, en función del tiempo, es posible conocer el vector velocidad y si se conoce el vector velocidad, en función del tiempo, se puede conocer el vector posición de la partícula (recuerde que la integración es la operación inversa de la derivación).

Ejercicio 1.8.
Si la velocidad de una partícula está dada por $\mathbf{v} = 4t\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j}$, halle el vector posición de la partícula en el instante de tiempo t, sabiendo que partió de una posición en la cual en $\mathbf{r}_o = -(1.00\,\text{m})\mathbf{i} - (2.00\,\text{m})\mathbf{j}$ en $t_o = 0$. Compare su resultado con el vector posición dado en el ejercicio 1.2.

1.4.6. Vector aceleración (a)

A menudo, la velocidad de un cuerpo cambia en magnitud y/o dirección, al encontrarse en movimiento. Cuando esto ocurre se dice que el cuerpo tiene una aceleración. *La aceleración de un cuerpo se define como la rapidez con que cambia su vector velocidad al transcurrir el tiempo.*

1.4.7. Vector aceleración media ($\bar{\mathbf{a}}$)

De la figura 1.13, en el tiempo t_A una partícula se encuentra en el punto A y tiene una velocidad $\mathbf{v}_A$ y en el instante posterior t_B ($t_B > t_A$) se encuentra en el punto B y tiene una velocidad $\mathbf{v}_B$, la *aceleración media* $\bar{\mathbf{a}}$ durante el movimiento de A a B se define como *el cambio de velocidad dividido entre el intervalo de tiempo correspondiente*, es decir

$$\bar{\mathbf{a}} \equiv \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A}{t_B - t_A}, \tag{1.8}$$

$\bar{\mathbf{a}}$ es un vector ya que se obtiene dividiendo el vector $\Delta\mathbf{v}$ con el escalar Δt , o sea, que se caracteriza por su magnitud y dirección. Su dirección es la de $\Delta\mathbf{v}$ y su magnitud es dada por $|\Delta\mathbf{v}/\Delta t|$. $\bar{\mathbf{a}}$ es una aceleración media ya que

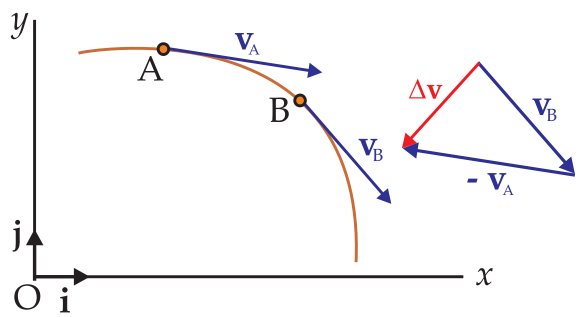


Figura 1.13: *Vector aceleración media.*

no se ha dicho la forma como varía el vector velocidad con el tiempo durante el intervalo de tiempo Δt . Si durante este intervalo de tiempo no hay cambio en el vector velocidad, esto es, si el vector velocidad permanece constante, en magnitud y en dirección, entonces en todo el intervalo de tiempo $\Delta\mathbf{v} = 0$ y la aceleración sería cero.

Dimensiones y unidades del vector aceleración media
De acuerdo con la ecuación (1.8), las dimensiones del vector aceleración son LT^{-2}. Por consiguiente, las unidades son $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ en el sistema SI, $\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$ en el sistema gaussiano, $\text{p}\cdot\text{s}^{-2}$ en el sistema inglés; y en general, cualquier unidad de longitud dividida por una unidad de tiempo al cuadrado, tal como $\text{km}\cdot\text{h}^{-2}$.

Ejemplo 1.7.

Una partícula pasa por el punto A en el instante t_A y por el punto B en el instante t_B . Determine el vector aceleración media de la partícula entre estos dos puntos, sabiendo que su vector velocidad está dado por $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$, donde $\mathbf{v}$ está dado en m.s^{-1} y t en s.

Solución
En este caso, la velocidad de la partícula en el punto A está dada por $\mathbf{v}_A = \mathbf{i} - 2t_A\mathbf{j}$ y en el punto B por $\mathbf{v}_B = \mathbf{i} - 2t_B\mathbf{j}$, o sea que el cambio en la velocidad es $\Delta\mathbf{v} = -2(t_B - t_A)\mathbf{j}$. Reemplazando $\Delta\mathbf{v}$ y $\Delta t = t_B - t_A$ en la ecuación (1.8), se encuentra que el vector aceleración media es dado por

$$\bar{\mathbf{a}} = -(2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})\mathbf{j}.$$

Por el resultado obtenido, se tiene que la velocidad no cambia en la dirección del eje x y por ello no aparece componente de aceleración en dicha dirección, mientras que se presenta un cambio de velocidad en la dirección del eje y lo que hace que se presente una componente de aceleración en esta dirección.

Ejercicio 1.9.
Una partícula pasa por el punto A en el instante t_A y por el punto B en el instante t_B. Determine el vector aceleración media de la partícula entre estos dos puntos, sabiendo que su vector velocidad está dado por $\mathbf{v} = 4t\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j}$, donde $\mathbf{v}$ está dado en m.s^{-1} y t en s.

1.4.8. Vector aceleración instantánea (a)

Si una partícula se está moviendo de tal manera que su aceleración media, medida en varios intervalos de tiempo diferentes no resulta constante, se dice que se tiene una aceleración variable. La aceleración puede variar en magnitud y/o dirección. En tales casos, se trata de determinar la aceleración de la partícula en un instante dado cualquiera, llamada *aceleración instantánea* **a** y definida por

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (1.9)$$

Si el vector velocidad en componentes rectangulares está dado por $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$, entonces el vector aceleración se expresa en la forma

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathbf{j} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}. \qquad (1.10)$$

De este modo su magnitud y dirección están dadas, respectivamente, por

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \text{y} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{a_x}{a_y}.$$

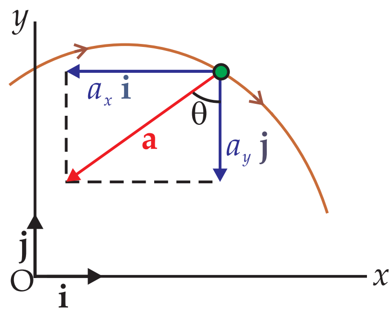


Figura 1.14: *Componentes rectangulares del vector aceleración.*

Como se muestra en la figura 1.14, el vector aceleración siempre apunta hacia la concavidad de la trayectoria y en general no es tangente ni perpendicular a ella.

Las dimensiones y unidades del vector aceleración instantánea, o simplemente aceleración, son las mismas que las del vector aceleración media.

De la definición de aceleración, ecuación (1.9), se encuentra que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \int_{t_o}^{t}\mathbf{a}(t)\mathrm{d}t. \qquad (1.11)$$

Esta integral se puede resolver sólo si se conoce la forma como varía la aceleración con el tiempo.

En el caso particular que el vector aceleración permanezca constante, en magnitud y dirección, entonces

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \mathbf{a}(t - t_o). \qquad (1.12)$$

Reemplazando la ecuación (1.12) en la ecuación (1.6), luego de integrar y evaluar se llega a

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}_o(t - t_o) + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_o)^2. \qquad (1.13)$$

Expresión que únicamente es válida si el vector aceleración permanece constante mientras la partícula está en movimiento.

Ejemplo 1.8.
Halle la aceleración, en función del tiempo, de una partícula cuya velocidad está dada por $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$.

Solución
Derivando la expresión anterior respecto al tiempo, se encuentra que la aceleración está dada por

$$\mathbf{a} = (-2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\mathbf{j}.$$

Este resultado muestra que la aceleración de la partícula es una constante a lo largo de la dirección y, lo que se esperaba ya que coinciden la aceleración media (ejemplo 1.7) y la aceleración instantánea.

Ejercicio 1.10.
Halle la aceleración, en función del tiempo, de una partícula cuya velocidad está dada por $\mathbf{v} = 4t\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j}$.

Ejemplo 1.9.
Halle, en función de t, la velocidad de una partícula cuya aceleración está dada por $\mathbf{a} = (-2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\mathbf{j}$, si $\mathbf{v}_o = (1.0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\mathbf{i}$ en $t_o = 0$.

Solución
Luego de reemplazar $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}_o$ en la ecuación (1.11), al integrar y evaluar se llega a la expresión

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2t\mathbf{j},$$

que es un resultado idéntico a la expresión dada en el ejemplo 1.8, como se esperaba.

Ejercicio 1.11.
Halle, en función de t, la velocidad de una partícula cuya aceleración está dada por $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 6t\mathbf{j}$, si $\mathbf{v}_o = 0$ en $t_o = 0$. Compare con la expresión dada para $\mathbf{v}$ en el ejercicio 1.9.

1.5. Movimiento rectilíneo de una partícula

Hasta este momento se han definido, de manera general, las cantidades cinemáticas que permiten describir el movimiento de los cuerpos, mediante el modelo de partícula. En lo que sigue, se consideran casos particulares de las expresiones consideradas anteriormente.

Se inicia con el caso del movimiento más simple que puede presentarse como es el de un cuerpo cuya trayectoria es una línea recta, la cual se hace coincidir, generalmente, con uno de los ejes de coordenadas (x ó y). Luego de analizar este movimiento, se analizan otros movimientos más generales en el plano, los cuales se representan por medio de sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas o utilizando coordenadas polares.

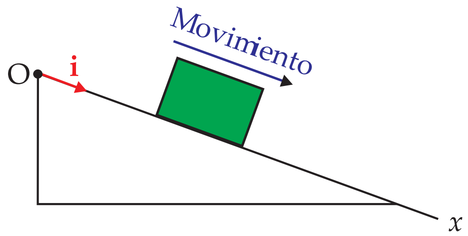


Figura 1.15: *Movimiento rectilíneo de una partícula.*

Aunque el desplazamiento por definición es una cantidad vectorial, se considera en primer lugar la situación en la cual sólo una componente del desplazamiento es diferente de cero, ya que en la mayoría de los casos se hace coincidir uno de los ejes de coordenadas con la trayectoria rectilínea descrita por la partícula. La trayectoria en línea recta puede ser vertical, horizontal u oblicua, como la mostrada en la figura 1.15.

Si en la figura 1.15, el eje x coincide con la trayectoria descrita por una partícula, se tiene que el vector posición, el vector velocidad y el vector aceleración de la partícula están dados, respectivamente, por

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}, \qquad \mathbf{v} = v\mathbf{i}, \qquad \mathbf{a} = a\mathbf{i}.$$

Ahora, como al hacer coincidir el eje x con la trayectoria de la partícula, ya queda definida la dirección del movimiento, es posible escribir las cantidades anteriores en forma escalar, es decir

$$r = x, \qquad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{1.14}$$

O sea, las definiciones y conceptos de la sección anterior siguen siendo válidos, ecuaciones (1.1) a (1.13), siempre y cuando se tenga presente que solo aparece una componente en cada uno de los vectores, si la trayectoria coincide con el eje utilizado.

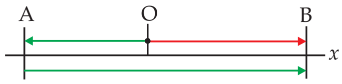


Figura 1.16: *Desplazamiento y distancia recorrida.*

Es preciso recordar que no se debe confundir *desplazamiento* con *distancia recorrida*, como se ilustra en la figura 1.16, donde una partícula va del origen de coordenadas O al punto A y luego regresa, pasando por O, hasta llegar al punto B.

Así, en este caso, el vector desplazamiento de la partícula tiene una magnitud dada por $\Delta x = \mathrm{OB}$, apuntando hacia la derecha; esto corresponde al vector que va del punto O al punto B, mientras que la distancia recorrida es $d = 2\mathrm{OA} + \mathrm{OB}$.

Ejercicio 1.12.
Una partícula, cuya ecuación cinemática de posición está dada por $x(t) = 3t^3 - 4t^2 - t + 5$, donde x se da en m y t en s, se mueve en línea recta a lo largo del eje x . a) Determine la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo. b) Calcule la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante $t = 2.5\,\mathrm{s}$. c) ¿Cuáles son las dimensiones de los coeficientes numéricos, en cada uno de los términos de las ecuaciones cinemáticas de posición, velocidad y aceleración?

1.5.1. Velocidad en el movimiento rectilíneo (v)

Cuando la trayectoria rectilínea de la partícula es tal que esta coincide con el eje de coordenadas, la velocidad es un vector cuya magnitud está dada por la segunda de las ecuaciones (1.14.) y cuya dirección coincide con la del movimiento. Así, la velocidad **v** estará dirigida en el sentido del vector unitario **i** si $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t > 0$ y en el sentido opuesto de **i** si $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t < 0$. O sea, el signo de $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ indica el sentido de movimiento, como se muestra en la figura 1.17.

En síntesis, de acuerdo con lo anterior, se tiene que el signo de la velocidad está dado por el sistema de referencia empleado.

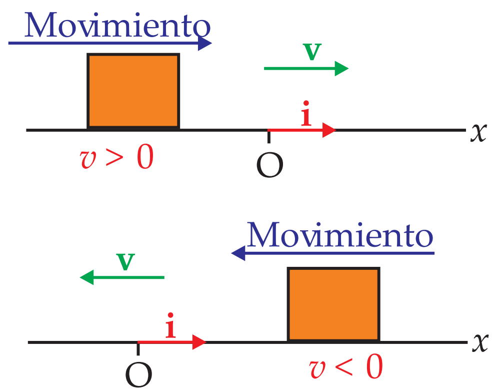


Figura 1.17: *El signo de v indica el sentido de movimiento.*

Para movimiento en una dimensión, la expresión dada por la ecuación (1.6) adquiere la forma

$$x = x_o + \int_{t_o}^{t} v(t)\mathrm{d}t, \tag{1.15}$$

que como se sabe, es posible resolver la integral si se conoce la forma funcional de $v(t)$.

Ejercicio 1.13.
Determine, en función del tiempo, la posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x, sabiendo que su ecuación cinemática de velocidad está dada por $v = 9t^2 - 8t - 1$, con $x_o = 5\,\mathrm{m}$ en $t_o = 0$. Compare su resultado con la expresión para $x(t)$ dada en el ejercicio 1.12.

1.5.2. Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Se presenta un caso particular de la ecuación (1.15) cuando la velocidad con la cual se mueve un cuerpo permanece constante, es decir, $\mathbf{v}$ = Constante. Esta situación ocurre, por ejemplo, cuando la aguja del velocímetro de un auto no cambia de posición mientras el auto está en movimiento por una vía recta. De este modo, integrando y evaluando en la ecuación (1.15), se obtiene

$$x = x_o + v(t - t_o), \qquad (1.16)$$

que es la *ecuación cinemática de posición* para este movimiento, denominado *movimiento rectilíneo uniforme* (MRU).

En muchos casos, es posible tomar $t_o = 0$.

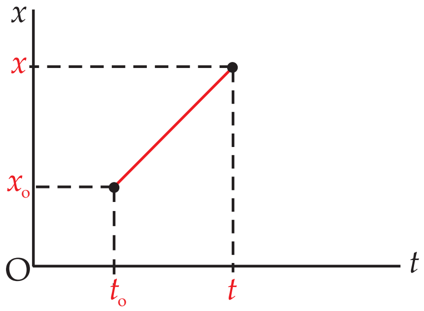


Figura 1.18: *Gráfica de la posición en función del tiempo para un MRU.*

De acuerdo con la geometría analítica, la ecuación (1.16) corresponde a la ecuación de una línea recta, donde su pendiente es la magnitud de la velocidad del movimiento.

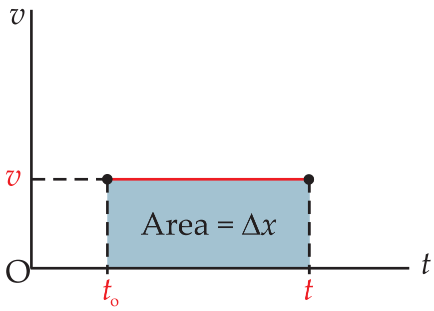


Figura 1.19: *Gráfica de la velocidad en función del tiempo para un MRU.*

En las figuras 1.18 y 1.19 se muestran las gráficas de posición y velocidad en función del tiempo, para el caso de una partícula con movimiento rectilíneo uniforme.

En la figura 1.18 se tiene que la pendiente de la gráfica de posición en función del tiempo está dada por

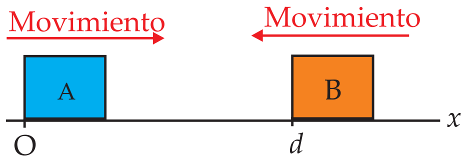
$$\text{Pendiente} = \frac{x - x_o}{t - t_o} = v. \qquad (1.17)$$

Al comparar las ecuaciones.(1.16) y (1.17) se encuentra que realmente la pendiente de la recta corresponde a la velocidad de una partícula con movimiento rectilíneo uniforme.

Ejercicio 1.14.
Utilizando la figura 1.19, demuestre que para el intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_o$, el área sombreada es igual al desplazamiento Δx de una partícula que tiene movimiento rectilíneo uniforme.

Ejemplo 1.10.
Dos autos A y B se mueven con velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, sobre una pista recta, en carriles paralelos y con sentidos opuestos. Inicialmente, los autos están separados una distancia d. a) Haga un diagrama ilustrativo de la situación planteada, donde se muestre el sistema de referencia a emplear. b) Teniendo en cuenta el sistema de referencia elegido, plantee las ecuaciones cinemáticas de posición para cada auto. c) Determine el tiempo que demoran los autos en pasar uno frente al otro. d) Halle el valor de la cantidad obtenida en el numeral anterior, si $v_A = 216\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, $v_B = 40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ y $d = 50\,\mathrm{m}$

Solución
a) Diagrama ilustrativo de la situación planteada, en el cual se muestra el sistema de referencia a emplear.



b) De acuerdo con el enunciado, las cantidades d, v_A y v_B son dadas y los autos se mueven con velocidades constantes, por lo que cada uno tiene movimiento rectilíneo uniforme. Así, las ecuaciones cinemáticas de posición tienen la forma general dada por la ecuación (1.16), donde para este caso, $t_o = 0$, $x_{oA} = 0$ y $x_{oB} = d$.

Respecto al sistema de referencia mostrado en el diagrama y con origen en O, las ecuaciones cinemáticas de posición para los autos A y B, respectivamente, adquieren la forma

$$x_A = v_A t. \tag{1}$$

$$x_B = d - v_B t. \tag{2}$$

c) Cuando un auto pasa frente al otro la posición es la misma, por lo que las ecuaciones (1) y (2) son iguales, teniendo en cuenta que a partir de la situación inicial, el tiempo que demoran los autos en encontrarse es el mismo.

Por lo tanto, luego de igualar las ecuaciones (1) y (2), y simplificar, se encuentra que el tiempo que demoran en encontrarse está dado por

$$t = \frac{d}{v_A + v_B}. \tag{3}$$

d) Al reemplazar en la ecuación (3) los valores $v_A = 216\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} \equiv 60\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_B = 40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ y $d = 50\,\mathrm{m}$, se tiene

$$\begin{aligned} t &= \frac{50\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} + 40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}} \\ &= 0.5\,\mathrm{s}, \end{aligned}$$

que es el tiempo que los autos demoran en pasar uno frente al otro.

Ejercicio 1.15.
Dos autos A y B se mueven con velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ ($v_A > v_B$), sobre una pista recta, en carriles paralelos y en el mismo sentido. Inicialmente, los autos están separados una distancia d. a) Haga un diagrama ilustrativo de la situación planteada, donde se muestre el sistema de referencia a emplear. b) Teniendo en cuenta el sistema de referencia elegido, plantee las ecuaciones cinemáticas de posición para cada auto. c) Determine el tiempo que demoran los autos en pasar uno frente al otro. d) Halle el valor de la cantidad obtenida en el numeral anterior, si $v_A = 60\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_B = 144\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ y $d = 50\,\mathrm{m}$, e) ¿Qué se puede afirmar respecto al tiempo, cuando las velocidades de los autos son iguales?

1.5.3. Aceleración en el movimiento rectilíneo

De acuerdo con la definición de aceleración y para el caso de movimiento rectilíneo, con el eje de coordenadas coincidente con la trayectoria, un cuerpo posee aceleración si cambia la magnitud de la velocidad con el tiempo, es decir, si $v = v(t)$. La aceleración es un vector cuya magnitud está dada por la tercera de las ecuaciones (1.14) y cuya dirección coincide con la del movimiento o con la opuesta, dependiendo de si la magnitud de la velocidad aumenta o disminuye con el tiempo. Igual que para la velocidad, el signo de la aceleración lo da el sistema de referencia.

1.5.4. Movimiento acelerado

Si la magnitud de la velocidad aumenta con el tiempo, se tiene movimiento *acelerado*, y en este caso la velocidad y la aceleración tienen el mismo sentido, como se ilustra en la figura 1.20. Esta situación se presenta cuando en un auto se aplica el acelerador.

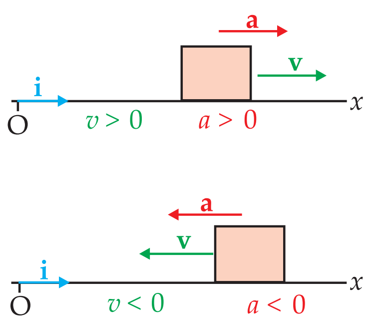


Figura 1.20: *Movimiento rectilíneo acelerado.*

En síntesis, un cuerpo tiene movimiento rectilíneo acelerado, cuando tanto la velocidad como la aceleración tienen el mismo signo.

1.5.5. Movimiento rectilíneo desacelerado o retardado

Cuando la magnitud de la velocidad disminuye con el tiempo, se tiene movimiento rectilíneo desacelerado o retardado, es decir, cuando la velocidad y la aceleración tienen sentidos opuestos, como se muestra en la figura 1.21. Esta situación se presenta cuando en un auto se aplican los frenos.

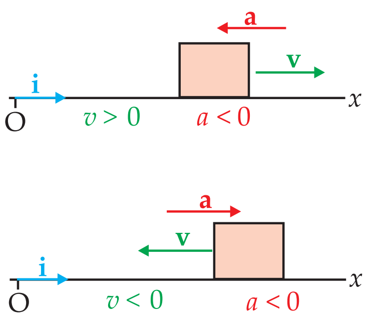


Figura 1.21: *Movimiento rectilíneo retardado.*

En síntesis, un cuerpo tiene movimiento rectilíneo desacelerado o retardado, cuando la velocidad y la aceleración tienen signos opuestos.

Para movimiento en una dimensión, la ecuación (1.11) se puede escribir en forma integral y es posible resolverla si se conoce la forma funcional de $a(t)$.

$$v = v_o + \int_{t_o}^{t} a(t)\mathrm{d}t. \qquad (1.18)$$

Ejercicio 1.16.
Determine, en función del tiempo, la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje x, si la ecuación cinemática de aceleración está dada por $a = 18t - 8$, con $v_o = -1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ en $t_o = 0$. Compare su resultado con la expresión para $v(t)$ dada en el ejercicio 1.13.

1.5.6. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

Es un movimiento en el cual la magnitud de la aceleración permanece constante, es decir, $a(t) = a =$ Constante. De este modo, la ecuación (1.18) toma la forma

$$v = v_o + a(t - t_o), \qquad (1.19)$$

esta es la *ecuación cinemática de velocidad para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado* (MRUA).

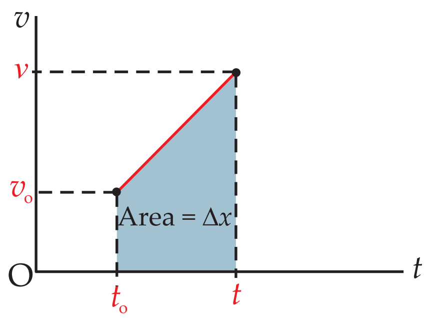


Figura 1.22: *Gráfica de la velocidad en función del tiempo para un MRUA.*

La ecuación (1.19) corresponde a la ecuación de una línea recta, donde su pendiente es la magnitud de la aceleración del movimiento. En las figuras 1.22 y 1.23 se muestran las gráficas de velocidad y aceleración en función del tiempo, para el caso de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

De la figura 1.22, se tiene que la pendiente de la gráfica de velocidad en función del tiempo está dada por:

$$\text{Pendiente} = \frac{v - v_o}{t - t_o} = a. \qquad (1.20)$$

Al comparar la ecuación (1.20) con la ecuación (1.19), se encuentra que la pendiente de la recta corresponde a la aceleración de una partícula con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

La ecuación cinemática de posición de una partícula con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, se obtiene al sustituir la ecuación (1.19) en la ecuación (1.15), donde al integrar y evaluar se llega a la expresión

$$x = x_o + v_o(t - t_o) + \tfrac{1}{2}a(t - t_o)^2, \qquad (1.21)$$

expresión que sólo es válida si la magnitud de la aceleración permanece constante.

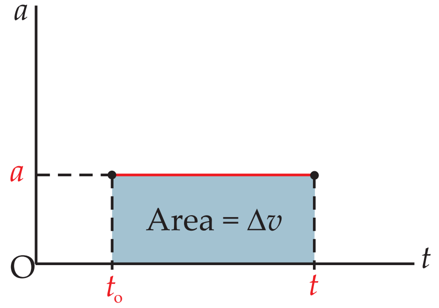


Figura 1.23: *Gráfica de la aceleración en función del tiempo para un MRUA.*

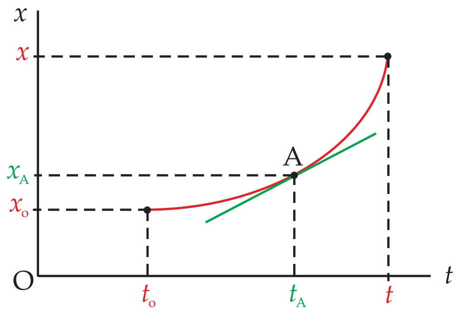


Figura 1.24: *Gráfica de la posición en función del tiempo para un MRUA.*

Cuando se grafica la posición de una partícula con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en función del tiempo, se obtiene una parábola cuya concavidad depende del signo de la aceleración. En la figura 1.24 se muestra la gráfica en el caso de una aceleración positiva, donde la curva es cóncava hacia arriba.

La pendiente de la recta tangente en un punto, tal como A en la figura 1.24, corresponde a la velocidad de una partícula cuando pasa por la posición x_{A} . En forma matemática

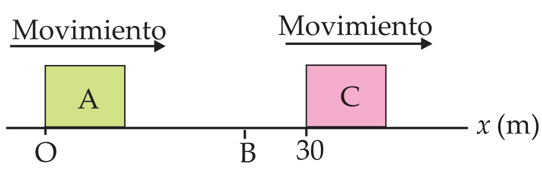
$$v_{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \mid_{x=x_{\mathrm{A}}}.$$

Ejercicio 1.17.
Demuestre que el área sombreada, en la gráfica de la figura 1.23, es igual al cambio en la velocidad Δv de una partícula en el intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_{\mathrm{o}}$, cuando se tiene movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Ejercicio 1.18.
Demuestre que el área sombreada, en la gráfica de la figura 1.22, es igual al desplazamiento Δx de una partícula en el intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_{\mathrm{o}}$, cuando tiene movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Ejemplo 1.11.
Un auto viaja a $60\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ a lo largo de una pista recta. El conductor del auto ve un camión que viaja delante de él a una distancia de $30\,\mathrm{m}$ y con una velocidad de $13.89\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. El conductor del auto aplica los frenos a los $2\,\mathrm{s}$ de haber observado el camión, generando una aceleración de $50\,\mathrm{cm\cdot s^{-2}}$. a) Haga un diagrama ilustrativo de la situación plateada, incluyendo el sistema de referencia a emplear. b) Plantee las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad que rigen el movimiento del auto y del camión. c) ¿El auto alcanza al camión? ¿Por qué? d) Calcule el tiempo en que se detiene el auto. e) Calcule la posición del auto y del camión en el instante que se detiene el auto.

Solución
a) Diagrama ilustrativo de la situación plateada



En el diagrama se considera la situación inicial de los móviles, y se toma el origen de coordenadas del sistema de referencia en la posición donde el conductor del auto ve al camión. El punto B es la posición donde el auto aplica los frenos. De acuerdo con el enunciado, las cantidades dadas son $v_{\mathrm{oA}} = 60\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} \equiv 16.67\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $x_{\mathrm{oC}} = 30\,\mathrm{m}$, $v_{\mathrm{C}} = 13.89\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $t_{\mathrm{A}} = 2\,\mathrm{s}$ y $a = -50\,\mathrm{cm\cdot s^{-2}} \equiv -0.5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

b) Ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad para el auto y el camión:

Antes de aplicar los frenos, el auto tiene movimiento rectilíneo uniforme entre O y B, así la ecuación (1.16), con $t_{\mathrm{o}} = 0$ y $x_{\mathrm{o}} = 0$ adquiere la forma

$$x'_{\mathrm{A}} = 16.67t. \qquad (1)$$

A partir del punto B, el auto aplica los frenos y adquiere un movimiento rectilíneo uniformemente retardado, por lo que la ecuación (1.21) se transforma en

$$x_A = x_B + 16.67(t-2) - \tfrac{1}{2}0.5(t-2)^2. \qquad (2)$$

En cambio, el camión se mueve con movimiento rectilíneo uniforme a partir de $x_{oC} = 30\,\text{m}$, por lo que la ecuación (1.16) se puede escribir como

$$x_C = 30 + 13.89t. \qquad (3)$$

Ahora, reemplazando $t_A = 2\,\text{s}$ en la ecuación (1), se tiene que la posición del auto cuando aplica los frenos es

$$x_B = 33.34\,\text{m}. \qquad (4)$$

O sea que al reemplazar la ecuación (4) en la ecuación (2), se tiene

$$x_A = 33.34 + 16.67(t-2) - \tfrac{1}{2}0.5(t-2)^2. \qquad (5)$$

$$v_A = 16.67 - 0.5(t-2). \qquad (6)$$

En las expresiones (3), (5) y (6), t es el tiempo medido a partir de la situación inicial del auto y del camión, mostrada en la figura.

c) Si el auto y el camión se encuentran, su posición debe ser la misma. Por lo tanto, al igualar las ecuaciones (3) y (5), se llega a una expresión cuadrática en t , cuya solución es

$$t = 7.56 \pm \sqrt{-66.85},$$

que corresponde a soluciones físicamente no aceptables, ya que se obtiene un tiempo imaginario que no tiene significado dentro del marco de la física clásica. Lo anterior, permite concluir que el auto y el camión no se encuentran.

d) Para hallar el tiempo que tarda el auto en detenerse, la ecuación (6) se iguala a cero, lo que lleva al resultado

$$t = 35.34\,\text{s}.$$

e) La posición de los móviles cuando se detiene el auto, se encuentra reemplazando la ecuación (7) en las ecuaciones (3) y (5). De este modo se obtiene

$$x_A = 311.23\,\text{m} \qquad \text{y} \qquad x_C = 520.87\,\text{m}.$$

El resultado anterior muestra que cuando el auto se detiene, el camión se encuentra 209.64, m delante de él. Esto significa que el auto, mientras se encuentra en movimiento, está atrás del camión y por consiguiente no es posible que se encuentren como se concluyó en el numeral c).

Ejercicio 1.19.
Un auto viaja a $16.67\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ a lo largo de una pista recta. El conductor del auto ve un camión que viaja delante de él a una distancia de 5 m y con una velocidad de $40\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. El conductor del auto aplica los frenos a los 0.5 s de haber observado el camión, generando una aceleración de $50\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$. a) Haga un diagrama ilustrativo de la situación plateada, incluyendo el sistema de referencia a emplear. b) Plantee las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad que rigen el movimiento del auto y del camión. c) ¿El auto alcanza al camión? ¿Por qué? d) Calcule el tiempo en que se detiene el auto. e) Calcule la posición del auto y del camión en el instante que se detiene el auto. f) Analice completamente los resultados obtenidos.

Movimiento vertical de un cuerpo o caída libre

A diario se observan cuerpos que ascienden o descienden verticalmente en el aire. A este movimiento se le denomina *caída libre* cuando se presenta en el vacío, siempre y cuando sólo se considere el efecto debido a la acción de la tierra sobre el cuerpo. Por ello, en esta sección se desprecian los efectos que pueda tener el aire u otros cuerpos sobre el movimiento del cuerpo de interés, lo que equivale a suponer que se mueven en el vacío. Este es un ejemplo muy importante de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, y se presenta cuando los cuerpos caen libremente bajo la acción de la gravedad.

La aceleración con la cual se mueven libremente los cuerpos a lo largo de la vertical, se debe a la acción de la tierra sobre ellos y se denomina aceleración de la gravedad. Así que es

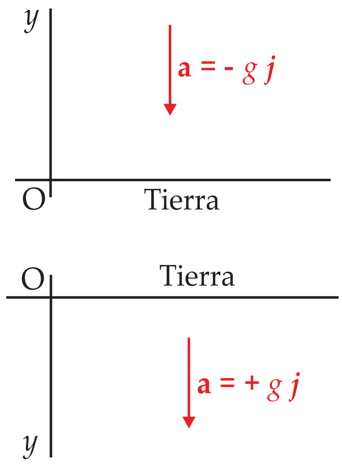


Figura 1.25: *El signo de la aceleración depende del sistema de referencia.*

un vector dirigido siempre hacia abajo en la dirección vertical y se representa por el símbolo **g**.

El signo de **g**, independientemente del sentido de movimiento del cuerpo a lo largo de la vertical, depende del sentido que se tome como positivo para el eje vertical, que generalmente se hace coincidir con el eje y. Así, $\mathbf{g} = \pm g\mathbf{j}$, es decir, el signo es positivo cuando el eje y se toma positivo verticalmente hacia abajo y negativo cuando eje y se toma positivo verticalmente hacia arriba. En síntesis, el signo depende del sistema de referencia como se indica en las figuras 1.25.

En la figura 1.26, se indican los dos sentidos de movimiento que puede presentar un cuerpo, cuando se mueve verticalmente sometido a la aceleración de la gravedad. En este caso, el cuerpo A tiene movimiento rectilíneo uniformemente retardado ya que el sentido del vector velocidad se opone al sentido del vector aceleración de la gravedad; en su lugar, el cuerpo B tiene movimiento rectilíneo uniformemente acelerado ya que el sentido del vector velocidad coincide con el sentido del vector aceleración de la gravedad.

En conclusión, cuando un cuerpo se mueve verticalmente hacia arriba, el movimiento es retardado y cuando un cuerpo se suelta o se lanza verticalmente hacia abajo, el movimiento es acelerado, independiente del sistema de referencia.

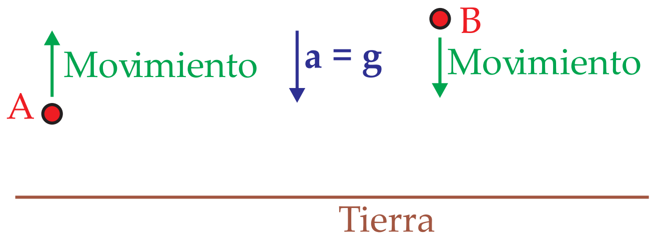
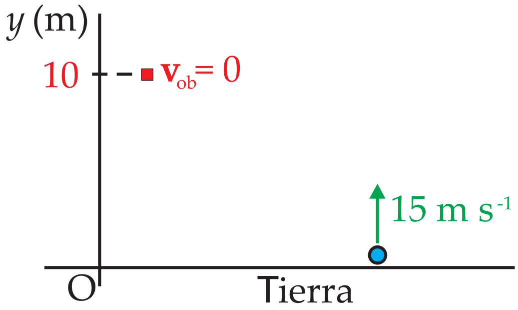


Figura 1.26: *Movimiento vertical acelerado y desacelerado.*

Aunque el valor de la aceleración de la gravedad g varía de un lugar a otro de la superficie terrestre, debido a los cambios de altura respecto al nivel del mar, su magnitud es cercana a $g = 9.8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ en el sistema de unidades SI ó $g = 32.2\,\mathrm{p\cdot s^{-2}}$ en el sistema inglés de unidades. El valor de **g** es el mismo para todos los cuerpos que caen y se toma independiente de la altura, mientras no se alejen mucho de la superficie terrestre ya que su valor disminuye a medida que la distancia sobre la superficie terrestre o bajo ella (menos masa que atrae) aumenta. La aceleración de la gravedad en Medellín es del orden de $9.7658\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, que es un valor cercano al tomado como referencia.

Ejemplo 1.12.
Desde la superficie de la tierra se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de $54\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. A los $0.7\,\mathrm{s}$ de lanzada la piedra, se deja caer un pequeño bloque de madera desde una altura de $10\,\mathrm{m}$, respecto a la superficie de la tierra. Los cuerpos se mueven sobre trayectorias paralelas. a) Haga un diagrama ilustrativo de la situación planteada, donde se muestre el sistema de referencia a emplear. b) Teniendo en cuenta el sistema de referencia elegido, plantee la ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad que rigen el movimiento de la piedra y del bloque. c) Calcule el tiempo que demoran los cuerpos en pasar uno frente al otro. d) En el instante que el bloque llega al piso, ¿dónde se encuentra la piedra? ¿Asciende o desciende la piedra?

Solución
a) Diagrama ilustrativo de la situación planteada En el diagrama se ha tomado



el origen de coordenadas del sistema de referencia, en la superficie de la tierra. Igualmente se muestra la posición inicial de cada cuerpo. De acuerdo con el enunciado, las cantidades dadas son $v_{oP} = 54\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \equiv 15\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $t_o = 0.7\,\mathrm{s}$ y $y_{ob} = 10\,\mathrm{m}$, donde la cantidad dada es $g = -9.8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

b) De acuerdo con el sistema de referencia mostrado, las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad para la piedra y el bloque son Para la piedra

$$y_p = 15t - \tfrac{1}{2}9.8t^2, \qquad (1)$$

$$v_p = 15 - 9.8t. \qquad (2)$$

Para el bloque de madera

$$y_b = 10 - \tfrac{1}{2}9.8(t-0.7)^2, \qquad (3)$$

$$v_b = -9.8(t-0.7). \qquad (4)$$

c) Cuando la piedra y el bloque se encuentran frente a frente, la posición vertical es la misma, es decir, las ecuaciones (1) y (3) son iguales. Al igualar y llevar a cabo el procedimiento, se encuentra que el tiempo que tardan en encontrarse es

$$t = 0.93\,\mathrm{s}.$$

d) Cuando el bloque llega al piso, se tiene que $y_b = 0$, por lo que mediante la ecuación (3) se encuentra que el tiempo de caída del bloque es

$$t = 2.1\,\mathrm{s}. \qquad (5)$$

Para determinar la posición de la piedra en ese instante, se remplaza la ecuación (5) en la ecuación (1) obteniéndose el valor

$$y_p = 9.9\,\mathrm{m}.$$

Para saber si la piedra asciende o desciende en ese instante, se remplaza la ecuación (5) en la ecuación (2), encontrándose el valor

$$v_p = -5.6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

Como el signo de la velocidad es negativo, de acuerdo con el sistema de referencia, se tiene que la piedra está descendiendo.

Ejercicio 1.20.
Desde la superficie de la tierra se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de $54\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. En el instante que se lanza la piedra, se deja caer un pequeño bloque de madera desde una altura de $10\,\mathrm{m}$, respecto a la superficie de la tierra. Los cuerpos se mueven sobre trayectorias paralelas. a) Haga un diagrama ilustrativo de la situación planteada, donde se muestre el sistema de referencia a emplear. b) Teniendo en cuenta el sistema de referencia elegido, plantee las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad que rigen el movimiento de la piedra y del bloque. c) Calcule el tiempo que demoran los cuerpos en pasar uno frente al otro. d) En el instante que el bloque llega al piso, ¿dónde se encuentra la piedra? ¿Asciende o desciende la piedra?

1.6. Movimiento curvilíneo en un plano

En esta sección inicialmente se considera el movimiento de una partícula en el plano, utilizando las coordenadas rectangulares x, y. Posteriormente se analiza el movimiento de una manera más general empleando las coordenadas polares r, θ.

1.6.1. Movimiento curvilíneo bajo aceleración constante

Este es un caso de movimiento, en el cual la partícula está sometida a una aceleración cuya magnitud y dirección permanecen constantes. En la vida real se presenta este movimiento cuando se patea un balón de fútbol, cuando se golpea un balón de voleibol, cuando se lanza una pelota de béisbol, cuando se dispara un proyectil, o en general, cuando se lanza o dispara un cuerpo con una velocidad que forma un ángulo α con la horizontal diferente de 0^o ó 90^o es decir, siempre que se cumple la condición $0^o < \alpha < 90^o$. Este movimiento también se presenta cuando desde una altura respecto a la tierra, se lanza un cuerpo horizontalmente, o sea, con $\alpha = 0^o$. Cuando un cuerpo adquiere tal movimiento, está sometido a la aceleración de la gravedad, que como se sabe, su magnitud y dirección permanecen constantes.

En el análisis que sigue, se supone que el aire no tiene ningún efecto sobre el movimiento de los cuerpos, o sea, se considera el movimiento como si fuera en el vacío.

Se supone que una partícula se lanza desde el punto A, con una velocidad $\mathbf{v}_o$ que forma un ángulo α con la horizontal, como se muestra en la figura 1.27. En este movimiento, es posible descomponer la velocidad inicial en componentes horizontal y vertical, lo que permite hacer el análisis utilizando coordenadas rectangulares.

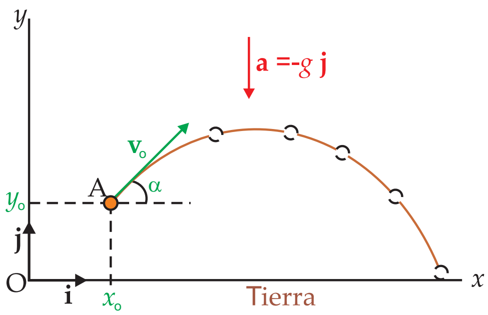


Figura 1.27: *Movimiento parabólico con origen en la tierra.*

De acuerdo con el sistema de referencia elegido, el eje x se hace coincidir con la superficie de la tierra. Además, el tiempo se empieza a medir desde el instante en que es lanzado el cuerpo, es decir, $t_o = 0$.

Considerando la figura 1.27, las condiciones iniciales en componentes rectangulares, están dadas por

$$\mathbf{r}_o = x_o\mathbf{i} + y_o\mathbf{j}.$$
$$\mathbf{v}_o = v_o\cos\alpha\mathbf{i} + v_o\,\text{sen}\,\alpha\mathbf{j}. \qquad (1.22)$$
$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}.$$

Ahora, la posición del cuerpo, en cualquier instante, está dada por

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}. \qquad (1.23)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.22) y (1.23) en la ecuación (1.13), que es válida cuando el vector aceleración es constante, se encuentra

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (x_o + v_o\cos\alpha t)\mathbf{i} + (y_o + v_o\,\text{sen}\,\alpha t - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{j}. \qquad (1.24)$$

Como los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son linealmente independientes, entonces al igualar componentes en la ecuación (1.24), se encuentra que las ecuaciones cinemáticas de posición para este movimiento, en las direcciones horizontal y vertical, están dadas por

$$x = x_o + v_o\cos\alpha t. \qquad (1.25)$$

$$y = y_o + v_o\,\text{sen}\,\alpha t - \tfrac{1}{2}gt^2. \qquad (1.26)$$

Al derivar las ecuaciones (1.25) y (1.26) respecto al tiempo, se encuentra que las ecuaciones cinemáticas de velocidad, en sus componentes horizontal y vertical para este caso, están dadas por

$$v_x = v_o\cos\alpha. \qquad (1.27)$$

$$v_y = v_o\,\text{sen}\,\alpha - gt. \qquad (1.28)$$

Finalmente, al derivar las ecuaciones (1.27) y (1.28) respecto al tiempo, se encuentra que las componentes de aceleración son

$$a_x = 0 \qquad \text{y} \qquad a_y = -g.$$

En conclusión, las ecuaciones (1.25) a (1.28) rigen el movimiento en las direcciones horizontal y vertical, donde en la horizontal se tiene una componente de movimiento con velocidad constante y en la vertical una componente de movimiento con aceleración constante. Mediante dichas expresiones es posible obtener toda la información sobre el movimiento de la partícula, hasta el instante que llega a la superficie de la tierra.

De acuerdo con lo anterior, es posible interpretar este movimiento como una superposición de un movimiento uniforme en la dirección horizontal y un movimiento uniformemente acelerado en la dirección vertical.

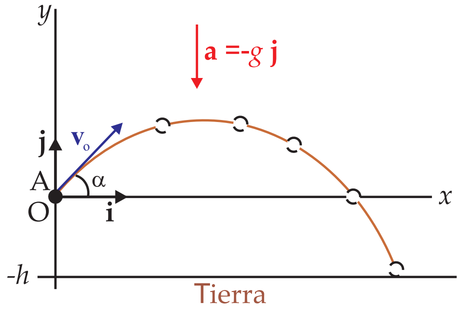


Figura 1.28: *Movimiento parabólico con origen en el punto de lanzamiento.*

Con el fin de simplificar y obtener más información sobre el movimiento de la partícula, se considera el caso en el cual se toma el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento A, como se muestra en la figura 1.28.

En este caso, $x_o = 0$ y $y_o = 0$, por lo que las ecuaciones (1.25) y (1.26) se transforman en

$$x = v_o \cos \alpha t. \tag{1.29}$$

$$y = v_o \,\text{sen}\, \alpha t - \tfrac{1}{2} g t^2. \tag{1.30}$$

Para hallar la ecuación de la trayectoria seguida por la partícula, se despeja el tiempo t de la ecuación (1.29) y se reemplaza en la ecuación (1.30), obteniéndose la ecuación cuadrática en la coordenada x

$$y = \tan\alpha x - \frac{g\sec^2\alpha}{2v_o^2} x^2, \tag{1.31}$$

que corresponde a la ecuación de una parábola de la forma $y = ax - bx^2$ donde a y b son constantes. Esta es la razón por la cual a este movimiento se le denomina movimiento parabólico, aunque también se le conoce como movimiento de proyectiles ya que estos describen generalmente esta trayectoria.

Como la componente vertical de la velocidad se hace cero en la altura máxima alcanzada por la partícula, mediante la ecuación (1.28), se encuentra que el tiempo que demora en alcanzarla está dado por

$$t = \frac{v_o \,\text{sen}\, \alpha}{g}. \tag{1.32}$$

Reemplazando la ecuación (1.32) en la ecuación (1.30) se obtiene la altura máxima alcanzada por la partícula, respecto al punto de lanzamiento, es decir

$$y_{\text{máx}} = \frac{(v_o \,\text{sen}\, \alpha)^2}{2g}. \tag{1.33}$$

De este modo, la altura máxima respecto a la superficie de la tierra, está dada por

$$\text{H}_{\text{máx}} = \frac{(v_o \,\text{sen}\, \alpha)^2}{2g} + h. \tag{1.34}$$

Para determinar el instante en que la partícula en cruza el eje x, se hace $y = 0$ en la ecuación (1.30), permitiendo llegar a las expresiones

$$t = 0 \qquad \text{y} \qquad t = 2\frac{v_o \,\text{sen}\, \alpha}{g}. \tag{1.35}$$

Resultado acorde con la realidad, ya que la partícula cruza dos veces el eje x, en $t = 0$ cuando es lanzado y en $t = 2v_o \,\text{sen}\, \alpha / g$ cuando lo cruza luego de haber pasado por su altura máxima.

La posición horizontal de la partícula, cuando cruza el eje x, se encuentra al reemplazar el tiempo dado por la ecuación (1.35) en la ecuación (1.29), obteniéndose

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_o^2}{g} \,\text{sen}\, 2\alpha. \tag{1.36}$$

De acuerdo con la ecuación (1.36), el máximo valor que puede adquirir el alcance se obtiene cuando $\text{sen}\, 2\alpha = 1$, es decir, para $2\alpha = 90^o$ ó $\alpha = 45^o$.

Cuando el cuerpo llega a la superficie de la tierra $y = -h$, por lo que al reemplazar en la ecuación (1.30) y luego de simplificar, se llega a una ecuación cuadrática en el tiempo t, cuyas soluciones están dadas por

$$t = \frac{v_o \,\text{sen}\, \alpha}{g}\left[1 \pm \sqrt{1 + 2gh\Big/(v_o \,\text{sen}\, \alpha)^2}\right], \tag{1.37}$$

donde el radicando es una cantidad mayor que uno. Así, solo se tiene un valor real para el tiempo, es decir, un valor con significado físico, cuando se toma el signo positivo que antecede al radical. Lo anterior, está de acuerdo con la situación planteada ya que el cuerpo, luego de ser lanzado, sólo se encuentra en la superficie de la tierra una vez.

Los resultados obtenidos en esta sección, son válidos cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- El alcance debe ser tan pequeño, que se pueda despreciar la curvatura de la tierra, y de este modo poder considerar la superficie de la tierra como plana.
- La altura máxima debe ser pequeña comparada con el radio terrestre, para poder despreciar la variación de la gravedad con la altura
- La magnitud de la velocidad inicial del proyectil debe ser tan pequeña, que puedan despreciarse los efectos del aire. Como se verá en la unidad 2, los efectos del aire sobre el movimiento de los cuerpos, se hacen significativos entre mayor sea la magnitud de la velocidad. En la figura 1.29 se muestra la diferencia en la trayectoria de una partícula, cuando se mueve en el vacío y cuando se mueve en un medio como el aire.

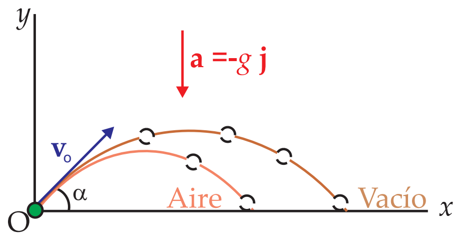


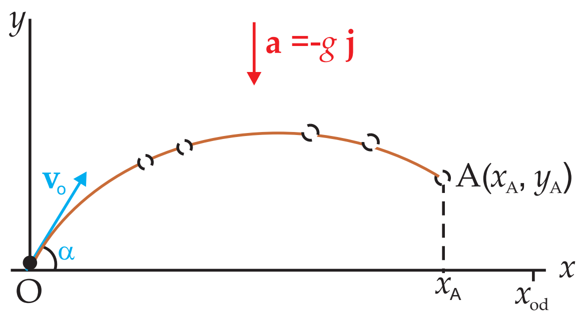
Figura 1.29: *Movimiento en el aire y en el vacío.*

Ejemplo 1.13.
En un partido de fútbol, un defensa patea el balón desde el piso, con una velocidad de 90 km · h^{-1} formando un ángulo de 30° con la horizontal. En el instante que sale el balón, un delantero que se encuentra a 60 m del defensa, corre hacia el balón y lo recibe en la cabeza a una altura de 2 m. a) Haga un diagrama ilustrativo de la situación planteada donde se muestre el sistema de referencia a emplear. b) Teniendo en cuenta el sistema de referencia elegido, plantee las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad para el balón y para el delantero. c) Calcule la posición horizontal del balón cuando da en la cabeza del delantero. d) Halle la velocidad del delantero, suponiendo que corre a velocidad constante.

Solución
Teniendo en cuenta el enunciado, las cantidades dadas son, para el balón $v_o = 90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} \equiv 25.0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $x_o = y_o = 0$, $t_o = 0$, $\alpha = 30^o$, $y_A = 2.0\,\mathrm{m}$. Para el delantero $x_{od} = 60.0\,\mathrm{m}$, y como cantidad conocida $g = -9.8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Diagrama ilustrativo de la situación planteada

En este diagrama, el origen de coordenadas del sistema de referencia, se toma en el punto donde es pateado el balón. Igualmente, se muestra la posición final tanto del balón como del delantero.



b) De acuerdo con el sistema de referencia mostrado en la figura, las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad, están dadas por
Para el balón

$$x_b = 25.0\cos 30t, \qquad (1)$$

$$v_{xb} = 25.0\cos 30,$$

$$y_b = 25.0\mathrm{sen}30t - \tfrac{1}{2}9.8t^2, \qquad (2)$$

$$v_{yb} = 25.0\,\mathrm{sen}\,30 - 9.8t.$$

Para el delantero

$$x_d = 60.0 + v_d t, \qquad (3)$$

$$v_d = \mathrm{Constante}.$$

c) Para calcular la posición horizontal del balón, cuando da en la cabeza del delantero, es necesario calcular primero el tiempo que demora en llegar a dicha posición, tanto el balón como el delantero.

Para ello, se reemplaza $y_A = 2.0\,\mathrm{m}$ en la ecuación (2). Así, se obtiene una ecuación cuadrática en el tiempo, cuyas soluciones son

$$t_1 = 0.2\,\mathrm{s} \qquad \text{y} \qquad t_2 = 2.4\,\mathrm{s}.$$

En principio estos valores reales de tiempo tienen significado físico, ya que el balón pasa dos veces por la posición en la cual $y = 2.0\,\mathrm{m}$. Ahora, reemplazando estos valores de tiempo en la ecuación (1), se encuentra que las posiciones horizontales correspondientes, están dadas por

$$x_{b1} = 4.3\,\mathrm{m} \qquad \text{y} \qquad x_{b2} = 52.0\,\mathrm{m}.$$

d) Como en el instante que el balón da en la cabeza, la posición horizontal del delantero es la misma del balón, entonces la ecuación (3), para los dos valores de la posición, da las siguientes velocidades del delantero

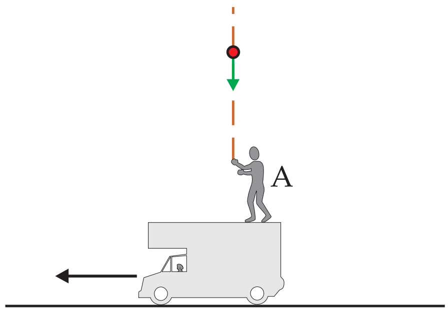
$$v_{d1} = -278.5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \qquad \text{y} \qquad v_{d2} = -3.3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Los resultados anteriores, muestran que en ambos casos el delantero debe correr hacia la izquierda, ya que las velocidades son negativas, es decir, se debe mover en el sentido negativo del eje x. Por otro lado, el valor de velocidad $v_{d1} = -278.5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, en el caso real no se debe considerar, puesto que hasta el momento en condiciones normales no ha sido posible que un atleta alcance esta velocidad tan alta. En los cien metros planos la velocidad alcanzada es del orden de $10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Por consiguiente, la velocidad del delantero debe ser $-3.3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, lo que indica que el balón ya ha pasado por la altura máxima cuando se encuentran balón y delantero.

Ejercicio 1.21.
En un partido de fútbol, un defensa patea el balón desde el piso, con una velocidad de $25.0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ formando un ángulo de 30º con la horizontal. En el instante que sale el balón, un delantero que se encuentra a 45 m del defensa, corre de tal manera que recibe el balón en la cabeza a una altura de 2.0 m. a) Haga un diagrama ilustrativo de la situación planteada donde se muestre el sistema de referencia a emplear. b) Teniendo en cuenta el sistema de referencia elegido, plantee las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad para el balón y para el delantero. c) Calcule la posición horizontal del balón cuando da en la cabeza del delantero. d) Halle la velocidad del delantero, suponiendo que corre a velocidad constante.

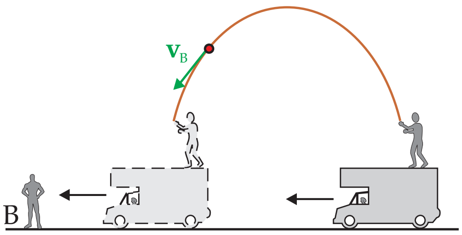
Ejemplo 1.14.
El observador A, que viaja en la plataforma de un móvil con movimiento rectilíneo uniforme respecto al piso, lanza una partícula verticalmente hacia arriba. El observador A está en reposo respecto al móvil y el observador B está en reposo respecto a la tierra. ¿Cuál es la trayectoria seguida por la partícula? Despreciar los efectos del aire.

Solución
Esta pregunta sólo se puede responder, cuando se haya definido con exactitud quien está analizando el movimiento. En este caso, se debe especificar si es el observador A o el observador B quien responde la pregunta anterior.



Respecto al observador A, la respuesta es que la partícula describe una trayectoria rectilínea y vertical, ya que la velocidad horizontal del observador es la misma velocidad horizontal de la partícula, es decir, para el observador A la partícula no tiene componente horizontal de la velocidad. De acuerdo con esto, la partícula regresa de nuevo a la mano del observador A como se ilustra en la figura.

En su lugar, para el observador B, la partícula tiene tanto una componente ho-



rizontal como vertical de velocidad, y de este modo la partícula describe una trayectoria parabólica, ya que respecto a la tierra la partícula regresa a una posición diferente como se muestra en la figura.

Ejercicio 1.22.
Desde un avión que vuela horizontalmente a una velocidad de $200\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, se deja caer un cuerpo. Un observador en tierra, quiere correr de tal manera que su velocidad le permita mantener el cuerpo por encima de su cabeza, para de este modo, poderlo recibir en su mano. Explique si es posible esta situación, considerando que el observador en tierra se mueve en línea recta.

1.7. Movimiento general en un plano

En esta sección se analizan los efectos que se presentan, cuando se considera por separado, los cambios en la magnitud y en la dirección de los vectores posición y velocidad, de una partícula que se mueve en una trayectoria curvilínea, utilizando coordenadas polares.

Igual que en el caso de coordenadas rectangulares, se consideran los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$, asociado a la coordenada radial r y $\mathbf{u}_\theta$, asociado a la coordenada angular θ. Estos vectores unitarios cumplen las siguientes condiciones

- Son perpendiculares entre sí.
- $\mathbf{u}_r$, en todo instante, es paralelo al vector posición $\mathbf{r}$ y se le denomina vector unitario radial.
- $\mathbf{u}_\theta$, en todo instante, es perpendicular al vector posición $\mathbf{r}$ y se le denomina vector unitario transversal.

Ahora, de acuerdo con la definición de estos vectores unitarios, mientras una partícula describe una trayectoria curvilínea, la dirección del vector posición cambia con el tiempo, es decir, que la dirección, mas no su magnitud, de los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$ cambia con el tiempo.

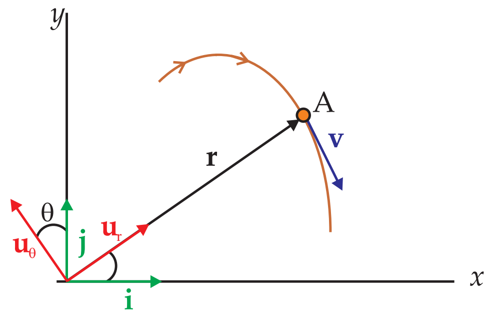


Figura 1.30: *Vectores unitarios radial y transversal.*

Con el fin de hacer más simple el trabajo matemático, se expresan los vectores $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$ en función de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ cuyas direcciones permanecen constantes, cuando el sistema de coordenadas rectangulares no rota mientras la partícula está en movimiento. De la figura 1.30, se tiene que los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$ en componentes rectangulares están dados por

$$\mathbf{u}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}, \tag{1.38}$$

$$\mathbf{u}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}, \tag{1.39}$$

donde θ se expresa en radianes.

1.7.1. Vector posición

De acuerdo con la definición del vector unitario $\mathbf{u}_r$ y de la figura 1.30, se tiene que el vector posición, cuando la partícula pasa por el punto A, se puede expresar en la forma

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r, \tag{1.40}$$

donde, en general, cambian tanto su magnitud como su dirección mientras la partícula describe la trayectoria curvilínea.

1.7.2. Vector velocidad

En esta sección se muestra que un cambio en la magnitud del vector posición ó un cambio en su dirección, genera una componente en la velocidad.

De acuerdo con la figura 1.30, la velocidad de la partícula en el punto A, está dada por la ecuación (1.5), donde al reemplazar la ecuación (1.40), adquiere la forma

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\mathbf{u}_r). \tag{1.41}$$

Derivando la ecuación (1.41) respecto al tiempo, teniendo en cuenta que $\mathbf{u}_r$ varía en dirección por tratarse de una trayectoria curvilínea, se tiene

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_r}{\mathrm{d}t}. \tag{1.42}$$

Derivando la ecuación (1.38) respecto al tiempo y comparando el resultado con la ecuación (1.39), se encuentra que

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\theta, \tag{1.43}$$

donde se observa que la derivada respecto al tiempo del vector unitario en la dirección radial, es un vector paralelo al vector unitario en la dirección transversal, es decir, es un vector perpendicular al vector posición.

Luego de reemplazar la ecuación (1.43) en la ecuación (1.42), se obtiene

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\theta. \tag{1.44}$$

Como resultado del procedimiento llevado a cabo, en la ecuación (1.44) aparecen dos componentes de la velocidad, una en la dirección radial y otra en la dirección transversal.

La componente de la velocidad en dirección radial, solo aparece cuando cambia con el tiempo la magnitud del vector posición y se le denomina *velocidad radial*, es decir

$$v_r \equiv \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}. \tag{1.45}$$

En su lugar, la componente de velocidad en la dirección transversal, solo aparece cuando cambia con el tiempo la dirección del vector posición y se le denomina *velocidad transversal*, o sea

$$v_\theta \equiv r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \tag{1.46}$$

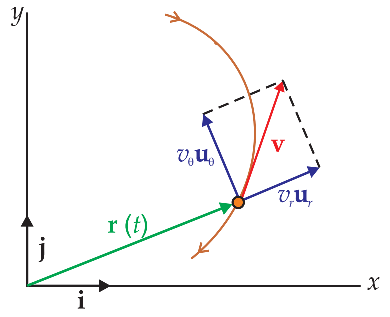


Figura 1.31: *Componentes radial y transversal del vector velocidad.*

Mediante las definiciones dadas por las ecuaciones (1.45) y (1.46), la ecuación (1.44) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta. \tag{1.47}$$

Ahora, como las componentes radial y transversal de la velocidad son perpendiculares, como se muestra en la figura 1.31, se cumple

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}.$$

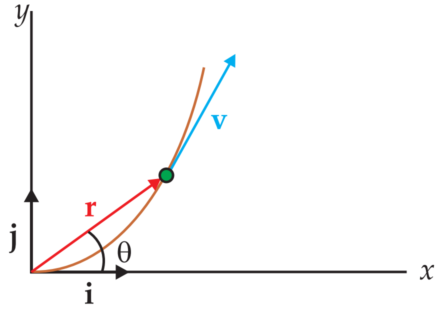
Ejemplo 1.15.
Una partícula se mueve en el plano xy de tal forma que su posición está dada por la expresión $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j}$ donde $\mathbf{r}$ está dado en p (pies) y t en s. Determine a) La ecuación de la trayectoria seguida por la partícula. b) Las coordenadas polares correspondientes, en función del tiempo. c) Las componentes radial y transversal de la velocidad, en función del tiempo

Solución
a) De acuerdo con la expresión dada para el vector posición de la partícula, se tiene que sus coordenadas rectangulares están dadas por $x = 2t$ y $y = 4t^2$. Mediante estas ecuaciones paramétricas se encuentra que la trayectoria seguida por la partícula está dada por

$$y = x^2.$$

En la figura anterior se muestra la trayectoria parabólica seguida por la partícula.

b) Las coordenadas polares están dadas por la magnitud del vector posición



y por la dirección del vector posición con respecto al eje x, como se indica en el diagrama anterior. Matemáticamente, se tiene

$$r = 2t(1 + 4t^2)^{1/2}, \qquad (1)$$

$$\theta = \tan^{-1} 2t. \qquad (2)$$

c) La componente radial de la velocidad, que se debe al cambio en la magnitud del vector posición con el tiempo, está dada por la expresión $v_r = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$. Mediante la ecuación (1), se encuentra que está dada por

$$v_r = \frac{2(1+8t^2)}{(1+4t^2)^{1/2}}.$$

La componente transversal de la velocidad, que se debe al cambio en la dirección del vector posición con el tiempo, está dada por la expresión $v_\theta = r\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$. Utilizando las ecuaciones (1) y (2) se encuentra que está dada por

$$v_\theta = \frac{4t}{(1+4t^2)^{1/2}}.$$

Ejercicio 1.23.
Teniendo en cuenta el ejemplo 1.15: a) Halle la velocidad de la partícula en componentes rectangulares. b) Compruebe que $(v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = (v_r^2 + v_\theta^2)^{1/2}$. c) Calcule el valor de las componentes radial y transversal de la velocidad de la partícula en el instante $t = 2\,\mathrm{s}$.

1.7.3. Vector aceleración

En esta sección, se muestra que un cambio en la magnitud de la velocidad ó un cambio en su dirección genera una componente en la aceleración.

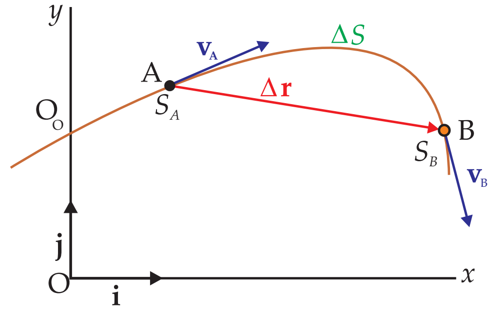


Figura 1.32: *Movimiento curvilíneo de una partícula.*

Para ello, primero se expresa el vector velocidad en función de su magnitud y dirección.

Se considera una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura 1.32, donde se toma $\mathrm{O_o}$ como punto de referencia, u origen, sobre la trayectoria. De este modo, la posición de la partícula cuando pasa por el punto A está dada por $S_\mathrm{A} = \mathrm{O_oA}$ (longitud de la trayectoria entre $\mathrm{O_o}$ y A) y cuando pasa por el punto B está dada por $S_\mathrm{B} = \mathrm{O_oB}$ (longitud de la trayectoria entre $\mathrm{O_o}$ y B).

El desplazamiento de la partícula a lo largo de la trayectoria, entre las posiciones A y B, es ΔS (longitud de la trayectoria entre A y B). Ahora, la ecuación (1.4) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\frac{\Delta S}{\Delta S},$$

$$\mathbf{v} = \left(\lim_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta S}\right)\left(\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}\right). \qquad (1.48)$$

Si se hace que el punto B se aproxime al punto A, se tiene que cuando están muy próximos $|\Delta r| \approx \Delta S$, así, el primer paréntesis de la ecuación (1.48) adquiere la forma

$$\lim_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}S} = \mathbf{u}_\mathrm{T}, \qquad (1.49)$$

que es un vector unitario tangente a la trayectoria seguida por la partícula, ya que se divide un vector en la dirección tangente a la trayectoria por su magnitud.

Por otro lado, el segundo paréntesis se transforma en

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = |\mathbf{v}| = v, \qquad (1.50)$$

que corresponde a la magnitud del vector velocidad puesto que se divide la magnitud del vector desplazamiento por el intervalo de tiempo correspondiente. Así, dS juega el mismo papel que dx ó dy en un movimiento rectilíneo.

De este modo, reemplazando las ecuaciones (1.49) y (1.50) en la ecuación (1.48), se encuentra que

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_T, \tag{1.51}$$

donde se expresa el vector velocidad como el producto de su magnitud por su dirección.

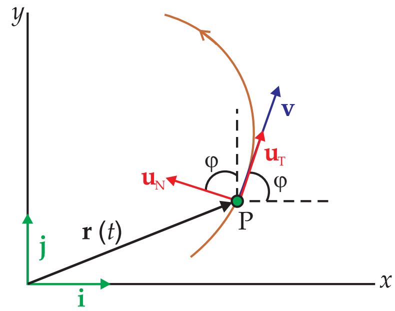


Figura 1.33: *Vectores unitarios tangencial y normal.*

Utilizando la figura 1.33, el vector unitario tangencial $\mathbf{u}_T$ que forma un ángulo φ con la horizontal, se expresa en componentes rectangulares por

$$\mathbf{u}_T = \cos\varphi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\varphi\mathbf{j}. \tag{1.52}$$

Además, como se indica en la figura 1.33, se define un segundo vector unitario $\mathbf{u}_N$ perpendicular al vector velocidad y dirigido hacia la concavidad de la trayectoria. Este vector se denomina vector unitario normal, que expresado en componentes rectangulares, adquiere la forma

$$\mathbf{u}_N = -\operatorname{sen}\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}. \tag{1.53}$$

Si en el instante t la partícula se encuentra en el punto P de la figura 1.33, se tiene que mediante la ecuación (1.51), la ecuación (1.9) adquiere la forma

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{u}_T). \tag{1.54}$$

Derivando la ecuación (1.54) respecto al tiempo, y teniendo en cuenta que el vector unitario tangencial varía en dirección por tratarse de una trayectoria curvilínea, se tiene

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + v\frac{d\mathbf{u}_T}{dt}. \tag{1.55}$$

Derivando la ecuación (1.52) respecto al tiempo y teniendo en cuenta la ecuación (1.53), se encuentra que la ecuación (1.55) adquiere la forma

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + v\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{u}_N. \tag{1.56}$$

Comparando las ecuaciones (1.55) y (1.56), se tiene que la derivada respecto al tiempo del vector unitario en la dirección tangencial es un vector perpendicular o normal a la curva en el punto P.

En la ecuación (1.56), la componente en la dirección paralela al vector unitario tangencial se le denomina *aceleración tangencial* y aparece siempre que cambia la magnitud del vector velocidad con el tiempo, es decir

$$a_T = \frac{dv}{dt}. \tag{1.57}$$

Igualmente, en la ecuación (1.56) la componente en la dirección paralela al vector unitario normal se le llama *aceleración normal* y aparece cuando cambia la dirección del vector velocidad con el tiempo, esto es

$$a_N = v\frac{d\phi}{dt}. \tag{1.58}$$

Con las definiciones dadas por las ecuaciones (1.57) y (1.58), la ecuación (1.56) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{u}_T + a_N\mathbf{u}_N. \tag{1.59}$$

Como las componentes tangencial y normal de la aceleración son perpendiculares, en este caso se cumple la relación

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}.$$

En la figura 1.34 se muestran las componentes tangencial y normal de la aceleración en un movimiento curvilíneo.

Hay otra forma de expresar la ecuación (1.58) para la componente normal de la aceleración. En la figura 1.35, se considera un pequeño desplazamiento de la partícula a lo largo de la trayectoria, donde $dS = \overline{PP'}$ es el pequeño arco que recorre la partícula al moverse desde el

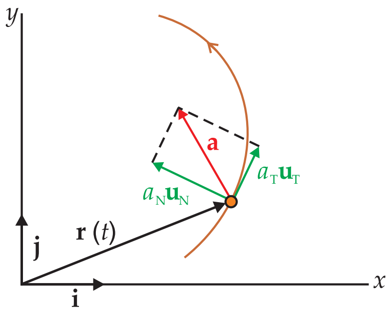


Figura 1.34: *Componentes tangencial y normal del vector aceleración.*

punto P al punto P' en un pequeño intervalo de tiempo dt.

la figura 1.35, las perpendiculares a las rectas tangentes en los puntos P y P', se cortan en el punto C llamado *centro de curvatura*.

Escribiendo el término dφ/dt en la forma

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}S}, \qquad (1.60)$$

donde se ha utilizado la ecuación (1.51).

Definiendo el *radio de curvatura* por ρ = CP, en la figura 1.35, se tiene

$$\mathrm{d}S = \rho\mathrm{d}\varphi \qquad \text{o} \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}S} = \frac{1}{\rho} \qquad (1.61)$$

.

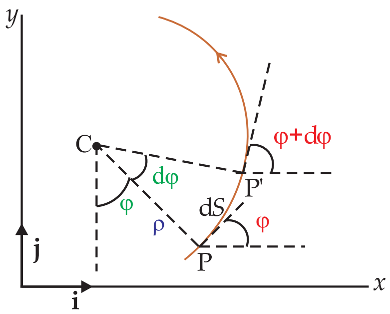


Figura 1.35: *Radio de curvatura en el momento curvilíneo.*

Remplazando la ecuación (1.61) en la ecuación (1.60), se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\rho} \qquad (1.62)$$

Así, al remplazar la ecuación (1.62) en la ecuación (1.58) se encuentra que la aceleración normal se puede expresar en la forma

$$a_\mathrm{N} = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (1.63)$$

De este modo, mediante la ecuación (1.63), la ecuación (1.56) adquiere la forma

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\mathrm{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{u}_\mathrm{N}. \qquad (1.64)$$

Ejemplo 1.16.
Una partícula se mueve en el plano xy de tal forma que su posición está dada por la expresión $r = 2ti + 4t^2j$ donde **r** está dado en p y t en s. Determine las componentes tangencial y normal de la aceleración.

Solución
Derivando respecto al tiempo el vector posición de la partícula, se encuentra que la magnitud y dirección de la velocidad están dadas por

$$v = 2(1+16t^2)^{1/2}, \qquad (1)$$

$$\varphi = \tan^{-1}4t. \qquad (2)$$

La componente tangencial de la aceleración, que se debe al cambio en la magnitud de la velocidad con el tiempo, está dada por . Mediante la ecuación (1) se llega a $a_T = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$

$$a_T = \frac{32t}{(1+16t^2)^{1/2}}.$$

La componente normal de la aceleración, que se debe al cambio con el tiempo en la dirección de la velocidad, está dada por $a_\mathrm{N} = v\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$. Con ayuda de las ecuaciones (1) y (2) se encuentra que está dada por

$$a_\mathrm{N} = \frac{8}{(1+16t^2)^{1/2}}.$$

Ejercicio 1.24.
Una partícula se mueve en el plano de tal forma que su posición está dada por la expresión $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j}$ donde **r** está dado en p (pies) y t en s. a) Determine la aceleración de la partícula en componentes rectangulares. b) Compruebe que $(a_x^2 + a_y^2)^{1/2} = (a_\mathrm{T}^2 + a_\mathrm{N}^2)^{1/2}$. c) Calcule

los valores de las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t = 2\,\text{s}$. d) Determine el radio de curvatura en función del tiempo y su valor en el instante $t = 2\,\text{s}$. 1.8.

1.8. Movimento circular

En esta sección se analiza un caso particular de movimiento curvilíneo en un plano, como es el movimiento circular. En este caso, la trayectoria seguida por una partícula es una circunferencia de radio R, dada por la expresión

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

donde se ha tomado el origen de coordenadas coincidente con el centro de la trayectoria, como se indica en la figura 1.36.

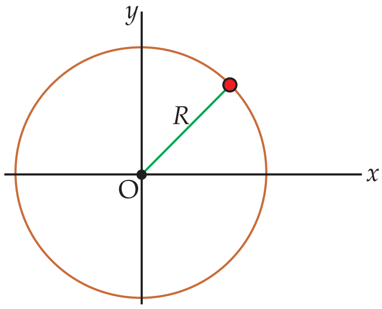


Figura 1.36: *Trayectoria en el movimiento circular.*

1.8.1. Vector posición

($\mathbf{r}$) Este movimiento se caracteriza por tener un vector posición en el cual su magnitud permanece constante, es decir, la ecuación (1.40) se transforma en

$$\mathbf{r} = R\mathbf{u}_r,$$

o sea, como se muestra en la figura 1.37, el vector posición únicamente cambia en dirección mientras la partícula está en movimiento.

1.8.2. Vector velocidad (v)

Como la magnitud del vector posición es igual al radio de la circunferencia descrita por la

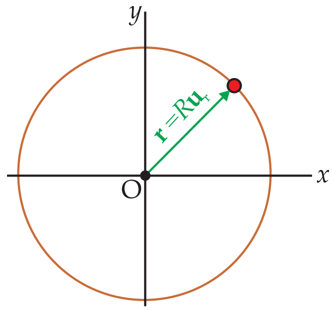


Figura 1.37: *Vector posición en el movimiento circular.*

partícula, se tiene que el primer término de la ecuación (1.44) se hace cero, transformándose dicha ecuación en la forma

$$\mathbf{v} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\theta. \tag{1.65}$$

Velocidad angular (ω)

La velocidad angular se define por

$$\omega \equiv \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \tag{1.66}$$

que tiene dimensión T^{-1}, y unidad $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Mediante la definición dada por la ecuación (1.66), la ecuación (1.65), para la velocidad, se puede escribir como

$$\mathbf{v} = R\omega\mathbf{u}_\theta. \tag{1.67}$$

En conclusión, en el movimiento circular, solo se tiene componente de velocidad en la dirección transversal, mientras que no se tiene componente en la dirección radial. Ahora, como en este tipo de movimiento, el vector posición es perpendicular tanto el vector unitario transversal como al vector unitario tangencial, entonces se cumple que

$$\mathbf{u}_\theta = \pm\mathbf{u}_\mathrm{T},$$

como es de esperarse, ya que en todo movimiento circular, el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria seguida por una partícula, como se muestra en la figura 1.38, donde $\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{u}_\mathrm{T}$.

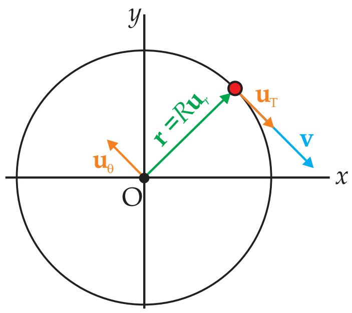


Figura 1.38: *Vector velocidad en el movimiento circular.*

1.8.3. Vector aceleración(a)

Cuando una partícula describe una trayectoria circular, su vector aceleración se obtiene reemplazando, en la ecuación (1.64), el radio de curvatura ρ por el radio R de la circunferencia seguida por la partícula, es decir,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\mathrm{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_\mathrm{N}. \tag{1.68}$$

Además, al reemplazar la magnitud de la velocidad, de acuerdo con la ecuación (1.67), el vector aceleración dado por la ecuación (1.68), se transforma en

$$\mathbf{a} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\mathrm{T} + \omega^2 R\mathbf{u}_\mathrm{N}. \tag{1.69}$$

Aceleración angular(α)

La aceleración angular se define por

$$\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}, \tag{1.70}$$

que tiene dimensión T^{-2}, y unidad rad s^{-2}. Mediante la ecuación (1.70), la ecuación (1.69) se puede escribir como

$$\mathbf{a} = R\alpha\mathbf{u}_\mathrm{T} + \omega^2 R\mathbf{u}_\mathrm{N}, \tag{1.71}$$

expresión que solo es válida en un movimiento circular.

En síntesis, en un movimiento circular generalmente se tiene una componente de aceleración tangencial y una componente de aceleración normal o centrípeta dadas, respectivamente, por

$$a_\mathrm{T} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\alpha, \tag{1.72}$$

$$a_\mathrm{N} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \tag{1.73}$$

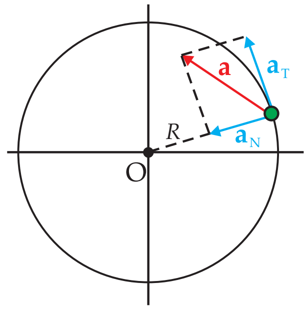


Figura 1.39: *Vector aceleración en el movimiento circular.*

En la figura 1.39, se muestran las componentes tangencial y normal de la aceleración.

1.8.4. Movimiento circular uniforme

Un tipo de movimiento circular se presenta, cuando tanto la magnitud de la velocidad como la magnitud de la aceleración permanecen constantes, es decir, cuando solo cambia la dirección del vector velocidad y por ende la dirección del vector aceleración. Cuando esta situación se presenta, se tiene un *movimiento circular uniforme*(MCU).

En otras palabras, una partícula tiene movimiento circular uniforme, cuando su aceleración angular es cero. Así, la aceleración únicamente tiene componente en la dirección normal, debido al cambio en la dirección del vector velocidad.

De acuerdo con lo anterior, la ecuación (1.71) se convierte en

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_\mathrm{N} = \omega^2 R\mathbf{u}_\mathrm{N}. \tag{1.74}$$

Igualmente, este tipo de movimiento se caracteriza porque los vectores aceleración y velocidad son perpendiculares entre sí, como se ilustra en la figura 1.40.

Una partícula sometida a un movimiento circular uniforme, posee un movimiento que se repite a intervalos iguales de tiempo, o sea, que el movimiento es *periódico*.

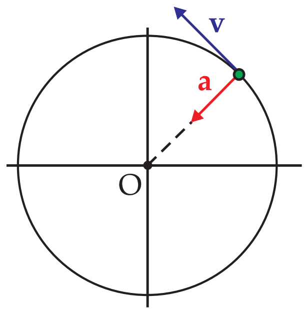


Figura 1.40: *Vectores velocidad y aceleración en el MCU.*

Si la partícula, con movimiento circular uniforme, realiza n vueltas en un tiempo t, se define el período P, o tiempo que tarda en dar una vuelta completa, por

$$P = \frac{t}{n}. \tag{1.75}$$

Además, la partícula tiene una frecuencia ν, o número de vueltas por unidad de tiempo, definida por

$$\nu = \frac{n}{t}. \tag{1.76}$$

Comparando las ecuaciones (1.75) y (1.76), se encuentra que la frecuencia es el inverso del período, o sea

$$\nu = \frac{1}{P}. \tag{1.77}$$

Por la ecuación (1.77), se tiene que la dimensión de frecuencia es T^{-1}, es decir, su unidad es s^{-1} que se acostumbra definir como

$$1\,\mathrm{s}^{-1} \equiv 1\,\mathrm{Hz},$$

símbolo que proviene de la palabra Hertz.

La frecuencia también se expresa en revoluciones por minuto o rpm, donde

$$1\mathrm{rpm} \equiv \frac{1}{60}\mathrm{Hz}.$$

Si en el tiempo t_o, una partícula con MCU tiene una posición angular θ, mediante la ecuación (1.66), se encuentra que su posición angular en el instante de tiempo t, está dada por

$$\theta = \theta_o + \int_{t_o}^{t} \omega(t)\mathrm{d}t, \tag{1.78}$$

pero como en este caso la velocidad angular es una constante del movimiento, la ecuación (1.78) se transforma en

$$\theta = \theta_o + \omega(t - t_o), \tag{1.79}$$

donde ω es una constante del movimiento y θ se expresa en radianes. Esta ecuación corresponde a la ecuación cinemática de posición angular en un movimiento circular uniforme.

Si en el tiempo $t_o = 0$, una partícula con movimiento circular uniforme tiene la posición angular $\theta_o = 0$, cuando da una vuelta se tiene que el tiempo y la posición angular, respectivamente, son $t = P$ y 2π. Reemplazando estos términos en la ecuación (1.79), se obtiene

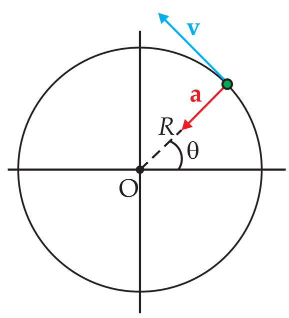
$$\omega = \frac{2\pi}{P}, \tag{1.80}$$

o teniendo en cuenta la ecuación (1.77)

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{1.81}$$

No sobra aclarar que las ecuaciones (1.80) y (1.81), únicamente son válidas para el caso de partículas con movimiento circular uniforme.

Ejemplo 1.17.
Una piedra, sujeta al extremo de una cuerda, se hace girar de tal manera que describe una circunferencia de radio 30 cm y en un plano horizontal. La posición angular de la piedra está dada por $\theta(t) = 3t$, donde θ está dado en rad y t en s. Calcular: a) La velocidad angular de la piedra. b) La velocidad de la piedra. c) El tiempo que demora la piedra en dar una vuelta. d) El número de vueltas que da la piedra en la unidad de tiempo. e) La aceleración de la piedra.



Solución
De acuerdo con el enunciado, $R =$

$30\,\mathrm{cm} \equiv 0.3\,\mathrm{m}$ y $\theta(t) = 3t$ son cantidades dadas.

a) Utilizando la definición de velocidad angular, ecuación (1.66), se encuentra que su valor es

$$\omega = 3\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

Este resultado indica que la velocidad angular es independiente del tiempo, de este modo, la piedra tiene un movimiento circular uniforme.

b) Como es un movimiento circular, la velocidad es un vector tangente a la trayectoria seguida por la piedra. Por consiguiente, de acuerdo con la definición de velocidad transversal (que en este caso coincide con la velocidad tangencial) dada por la ecuación (1.65), se encuentra que su valor es

$$v = 0.90\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

c) El tiempo que demora la piedra en dar una vuelta, que corresponde al período, se obtiene reemplazando $\theta = 2\pi\,\mathrm{rad}$ y $t = P$, en la expresión dada en el enunciado. Con ello, se encuentra que

$$P = 2.09\,\mathrm{s}.$$

d) El número de vueltas por unidad de tiempo, que corresponde a la frecuencia, se encuentra teniendo en cuenta que es igual al inverso del período, así

$$\nu = 0.48\,\mathrm{Hz}.$$

e) Como la piedra posee un movimiento circular uniforme, su aceleración coincide con la aceleración centrípeta dada por la ecuación (1.74), obteniéndose el valor

$$a = a_{\mathrm{N}} = 2.70\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}.$$

Ejercicio 1.25.
Una piedra, sujeta al extremo de una cuerda, se hace girar de tal manera que describe una circunferencia de radio 30 cm y en un plano horizontal. La posición angular de la piedra está dada por $\theta\,(t) = 3t$, donde θ está dado en rad y t en s. a) ¿Cuál es el valor de la aceleración angular de la piedra? ¿Por qué? b) ¿Por qué razón la piedra está sometida a una aceleración, si la magnitud de la velocidad permanece constante? c) En la situación considerada, ¿el vector aceleración es paralelo a la cuerda?

1.8.5. Movimiento circular uniformemente acelerado

Cuando la aceleración angular de una partícula permanece constante, se dice que tiene un movimiento circular uniformemente acelerado, es decir, que tanto la magnitud como la dirección del vector velocidad cambian con el tiempo. Como consecuencia, la velocidad angular también varía con el tiempo.

Ahora, si una partícula en el instante t_{o} tiene una velocidad angular ω_{o} y se mueve con una aceleración angular α, la velocidad angular ω en el instante de tiempo t, está dada por

$$\omega = \omega_{\mathrm{o}} + \alpha(t - t_{\mathrm{o}}), \qquad (1.82)$$

donde se ha utilizado la ecuación (1.70). Esta ecuación corresponde a la ecuación cinemática de velocidad angular en un movimiento circular uniformemente acelerado.

Por otro lado, al reemplazar la ecuación (1.82) en la ecuación (1.78), luego de integrar y evaluar se llega a

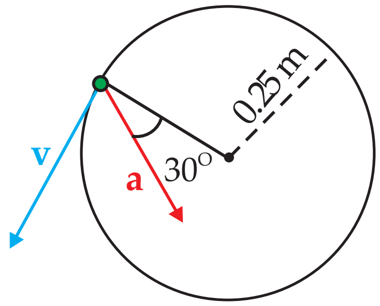
$$\theta = \theta_{\mathrm{o}} + \omega_{\mathrm{o}}(t - t_{\mathrm{o}}) + \tfrac{1}{2}\alpha(t - t_{\mathrm{o}})^2, \qquad (1.83)$$

que es la ecuación cinemática de la posición angular de una partícula con movimiento circular uniformemente acelerado.

Ejemplo 1.18.
La partícula de la figura, describe una trayectoria circular de radio $0.25\,\mathrm{m}$ y con una aceleración total de $9.0\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. En el instante mostrado, calcular: a) La aceleración tangencial de la partícula. b) La aceleración centrípeta de la partícula.

Solución
a) Para conocer la aceleración tangencial de la partícula, se halla la componente de la aceleración total que es paralela a la velocidad, es decir

$$a_{\mathrm{T}} = 9\,.0\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}\,\mathrm{sen}\,30 = 4.5\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}.$$



b) De igual manera, la aceleración centrípeta de la partícula corresponde a la componente de la aceleración en la dirección radial, o sea

$$a_N = 9.0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\cos 30 = 7.79\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Ejercicio 1.26.
Calcule la velocidad de la partícula, para el instante mostrado en la figura del ejemplo 1.18

1.8.6. Vector velocidad angular y vector aceleración angular

En esta sección, se define la velocidad angular y la aceleración angular como cantidades vectoriales, es decir, cantidades que tienen magnitud y dirección.

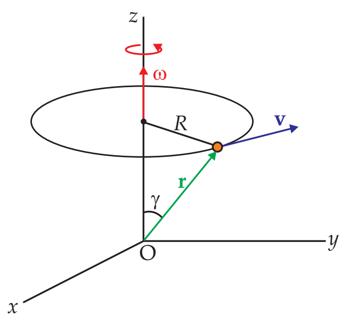


Figura 1.41: *Velocidad angular como vector.*

Se define el vector velocidad angular, como un vector perpendicular al plano en el cual se mueve la partícula, cuyo sentido está dado por la regla de la mano derecha, y que gira sobre sí mismo en el sentido que se mueve la partícula.

Por la ecuación (1.67), se tiene que la magnitud del vector velocidad está dada por

$$v = \omega R, \tag{1.84}$$

pero de la figura 1.41, se tiene que

$$R = r\mathrm{sen}\gamma, \tag{1.85}$$

por lo que al reemplazar la ecuación (1.85) en la ecuación (1.86), se obtiene

$$v = \omega r\,\mathrm{sen}\,\gamma, \tag{1.86}$$

donde γ es el ángulo entre el vector velocidad angular ω y el vector posición $\mathbf{r}$.

Ahora, por definición de producto cruz o vectorial, es posible escribir la ecuación (1.86) en la forma vectorial

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}, \tag{1.87}$$

expresión válida solo para movimiento circular. Como resultado se tiene que el vector velocidad es perpendicular tanto al vector velocidad angular como al vector posición, siendo esta condición de validez general.

De acuerdo con la ecuación (1.70), si la velocidad angular es un vector, también lo es la aceleración angular, es decir

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.88}$$

Derivando la ecuación (1.87) respecto al tiempo, y teniendo en cuenta la ecuación (1.88), se encuentra que el vector aceleración está dado por

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} = \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}). \tag{1.89}$$

En el caso de una partícula con movimiento circular uniforme, donde la aceleración sólo tiene componente en la dirección centrípeta, la ecuación (1.89) se transforma en

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}).$$

Como se muestra en la figura 1.42, el producto vectorial $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ apunta hacia el centro de la circunferencia y su magnitud está dada por

$$a = \omega^2 R,$$

ya que los vectores velocidad angular y velocidad son perpendiculares.

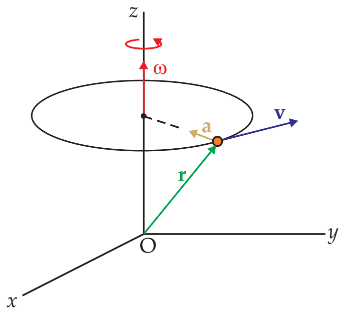


Figura 1.42: *Vectores velocidad y aceleración en el MCU.*

1.9. Velocidades altas y velocidades bajas

Existe una velocidad límite o máxima, que las partículas no pueden alcanzar y mucho menos sobrepasar. Esta velocidad es la *velocidad de la luz* cuyo valor es $c = 2.99792458 \times 10^8 \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, pero por razones de comodidad se aproxima a $c = 3 \times 10^8 \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Las velocidades que adquieren los cuerpos macroscópicos que se observan a diario, son velocidades muy pequeñas o bajas, comparadas con la velocidad de la luz. Por ejemplo, es común viajar por la Costa Atlántica a una velocidad de $100 \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Esta velocidad aparentemente es grande, pero si se le compara con la velocidad de la luz, es sólo el $9.3 \times 10^{-6}\,\%$ de ella, es decir, es una velocidad despreciable frente a la velocidad de la luz.

En el laboratorio, es posible que partículas microscópicas, como los electrones, alcancen velocidades comparables con la velocidad de la luz. Por ejemplo, pueden alcanzar velocidades de $0.9c$, $0.99c$, $0.999c$, $0.9999c$ que corresponden al 90 %, 99 %, 99.9 %, 99.99 % de la velocidad de la luz, respectivamente.

Lo anterior, lleva a clasificar las velocidades entre bajas y altas, donde se tienen velocidades bajas si la magnitud de la velocidad v de una partícula cumple la relación $v << c$, y se tienen velocidades altas cuando se tiene $v \sim c$.

El modelo de la cinemática que se ha analizado, o modelo clásico, únicamente es válido en el rango de velocidades bajas, esto es, cuando $v << c$.

Para partículas, con velocidades comparables a la velocidad de la luz ($v \sim c$), el modelo válido se conoce como *relatividad especial*, y los postulados en los que descansa este modelo llevan a cambios drásticos tales como el hecho que la longitud de una varilla a alta velocidad sea menor que cuando se encuentra en reposo; esta y otras consecuencias se han podido demostrar experimentalmente.

En este curso, se consideran partículas en movimiento con velocidades que son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

Ejemplo 1.19.
Las coordenadas de una partícula en movimiento, en función del tiempo, están dadas por $x = A\,\mathrm{sen}\,\omega t$ y $y = A\cos\omega t$. Determine a) La trayectoria seguida por la partícula. b) La magnitud de la velocidad de la partícula en cualquier instante. c) Las componentes tangencial y normal de la aceleración de la partícula, en cualquier instante. d) El sentido de movimiento de la partícula.

Solución
a) De acuerdo con el enunciado, el vector posición de la partícula en función del tiempo, está dado por

$$\mathbf{r} = A(\mathrm{sen}\omega t\mathbf{i} + \cos\omega t\mathbf{j}).$$

Por lo que al aplicar el teorema de Pitágoras, se encuentra que su magnitud es

$$r = A.$$

O sea, que la magnitud del vector posición de la partícula es constante mientras la partícula se mueve. De este modo, la partícula describe una trayectoria circular de radio $R = A$.

b) Empleando la definición de velocidad, se encuentra que está dada por

$$\mathbf{v} = \omega A(\cos\omega t\mathbf{i} - \mathrm{sen}\,\omega t\mathbf{j}),$$

por lo que su magnitud es

$$v = \omega A.$$

es decir, que la partícula se mueve de tal forma que la magnitud de su velocidad permanece constante, en otras palabras, tiene un movimiento circular uniforme.

c) Como la magnitud de la velocidad es independiente del tiempo, la componente tangencial de la aceleración es cero ($a_T = dv/dt$), pues es una consecuencia del cambio en la magnitud de la velocidad.

La componente normal o centrípeta de la aceleración, que proviene del cambio en la dirección del vector velocidad, en este caso coincide con la aceleración total de la partícula, es decir

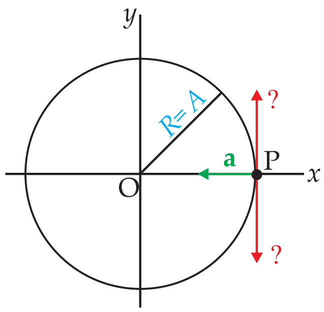
$$\mathbf{a} = -\omega^2 A(\mathrm{sen}\omega t\mathbf{i} + \cos\omega t\mathbf{j}) = -\omega^2\mathbf{r},$$

por lo que su magnitud está dada por

$$a_N = a = \omega^2 A.$$

Como se esperaba, la magnitud de la aceleración de la partícula permanece constante.

d) Para determinar el sentido de movimiento de la partícula en la trayectoria circular, se considera el punto P de la siguiente figura.



Cuando la partícula pasa por el punto P sus coordenadas son $x = A$ y $y = 0$, o sea que

$$\mathrm{sen}\,\omega t = 1 \qquad \cos\omega t = 0.$$

Como en ambos casos se cumple que $\omega t = \pi/2$, al reemplazar este valor en la expresión para la velocidad, se obtiene $\mathbf{v} = -\omega A\mathbf{j}$, lo cual indica que la partícula se mueve en una trayectoria circular de radio A, con movimiento circular uniforme y en sentido horario.

Ejercicio 1.27.
Las coordenadas de una partícula en movimiento, en función del tiempo, están dadas por $x = A\,\mathrm{sen}\,\omega t$ y $y = A\cos\omega t$. a) ¿Cuál es la posición inicial de la partícula si $t_o = 0$? ¿Cuál es la posición correspondiente de la partícula en la gráfica anterior? b) Determine la relación matemática entre el vector posición y el vector velocidad, en cualquier instante. ¿Qué ángulo forman estos dos vectores? ¿Por qué? c) Compruebe que se satisface la expresión $a_N = v^2/R$. d) ¿Cuál es la aceleración angular de la partícula? ¿Por qué?

PREGUNTAS

1. Una partícula se mueve durante un intervalo de tiempo Δt. En este intervalo de tiempo, la velocidad media de la partícula es cero. a) ¿Qué se puede decir acerca del desplazamiento de la partícula? b) ¿Cómo es la trayectoria seguida por la partícula? c) ¿Existe solo una trayectoria posible?

2. Una partícula describe una trayectoria en la cual el vector velocidad siempre es perpendicular al vector posición. ¿Cuál es la trayectoria seguida por la partícula?

3. Una partícula describe una trayectoria en la cual el vector velocidad siempre es perpendicular al vector aceleración. ¿Qué movimiento tiene la partícula?

4. Ün auto de carreras recorre una curva con velocidad constante". ¿Es correcta esta afirmación?

5. Un proyectil se lanza con una velocidad que forma un ángulo diferente de cero con la horizontal. Desprecie los efectos del aire. a) ¿Cuáles cantidades físicas permanecen constantes durante el movimiento? b) En algún instante, ¿se hace cero la velocidad? c) En algún instante, ¿el vector velocidad es perpendicular vector aceleración?

6. Cuando la velocidad de una partícula se hace cero, ¿necesariamente su aceleración es cero?

7. El símbolo $v(t)$ se puede interpretar como *la velocidad en función del tiempo* o como *el producto de la velocidad por el tiempo*. En las

siguientes igualdades, ¿qué interpretación se da a $v(t)$?

a) $\mathbf{v}(t) = -(5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})t\mathbf{i}$. b) $\mathbf{v}(t) = (4.3\,\mathrm{ms}^{-2})t\mathbf{i}$.

8. Para un cuerpo que se lanza desde el piso, verticalmente hacia arriba, se toma el sistema de referencia de tal manera que la dirección positiva del eje y apunta verticalmente hacia abajo. Entre qué puntos a) ¿La velocidad es positiva? b) ¿La velocidad es negativa? c) ¿La aceleración es positiva? d) ¿La aceleración es negativa? e) ¿El movimiento es acelerado? f) ¿El movimiento es desacelerado?

9. Desde un balcón, se lanza la piedra A verticalmente hacia arriba y la piedra B verticalmente hacia abajo. Si las velocidades con que son lanzadas tienen igual magnitud, ¿para cuál piedra es mayor la magnitud de la velocidad, justo antes de chocar con el piso?