

4 DINAMICA DE UN CUERPO RIGIDO

BERNARDO ARENAS GAVIRIA
Universidad de Antioquia
Instituto de Física

2011

Índice general

4. Dinámica de un cuerpo rígido	1
4.1. Introducción	2
4.1.1. Movimiento de traslación pura	2
4.1.2. Movimiento de rotación pura	3
4.1.3. Movimiento combinado de traslación y rotación	3
4.2. Torque de una fuerza respecto a un punto(θ)	3
4.3. Torque de un par de fuerzas o cupla	8
4.3.1. Efectos de traslación de un par de fuerzas	8
4.3.2. Efectos de rotación de un par de fuerzas	8
4.4. Descomposición de una fuerza en un sistema fuerza-par	9
4.5. Resultante de un sistema de fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido	12
4.5.1. Resultante de un sistema de fuerzas concurrentes	12
4.5.2. Resultante de un sistema de fuerzas coplanares	13
4.5.3. Resultante de un sistema de fuerzas paralelas	14
4.6. Vector momento angular de un cuerpo rígido	16
4.7. Momento de inercia de un cuerpo rígido	18
4.8. Ejes principales de inercia	20
4.8.1. Ejes principales de inercia en un cuerpo esférico	20
4.8.2. Ejes principales de inercia en un cuerpo cilíndrico	20
4.8.3. Ejes principales de inercia en un cuerpo rectangular	21
4.9. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos	21
4.10. Radio de giro de un cuerpo rígido	21
4.11. Ecuación de movimiento para la rotación de una cuerpo rígido	22
4.11.1. Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje principal de inercia	23
4.11.2. Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje no principal de inercia	23
4.11.3. Movimiento combinado de traslación y rotación de un cuerpo rígido	27
4.12. Energía de un cuerpo rígido	29
4.12.1. Energía cinética de un cuerpo rígido	29
4.12.2. Energía cinética traslacional de un cuerpo rígido	29
4.12.3. Energía cinética rotacional de un cuerpo rígido	30
4.12.4. Energía cinética total de un cuerpo rígido	30
4.12.5. Energía total de un cuerpo rígido	33
4.13. Movimiento por rodadura de un cuerpo rígido	35
4.14. Equilibrio de un cuerpo rígido	39

4.14.1. Equilibrio de un cuerpo rígido sometido sólo a dos fuerzas	39
4.14.2. Equilibrio de un cuerpo rígido sometido sólo a tres fuerzas	40

Dinámica de un cuerpo rígido

Competencias

En esta unidad se busca que el estudiante:

- Defina el concepto de cuerpo rígido, e infiera la diferencia entre el modelo de cuerpo rígido y el modelo de partícula.
- Distinga entre movimiento traslacional y movimiento rotacional.
- Defina, interprete y aplique el concepto de torque de una fuerza respecto a un punto.
- Defina el concepto de par de fuerzas o cupla e identifique los efectos que genera sobre un cuerpo rígido.
- Defina un sistema fuerza par e identifique los efectos que genera sobre un cuerpo rígido.
- Identifique los efectos que un sistema de fuerzas puede generar sobre un cuerpo rígido.
- Obtenga la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes, coplanares y paralelas, aplicadas a un cuerpo rígido.
- Defina el concepto de centro de masa de un cuerpo rígido.
- Obtenga el momento angular de un cuerpo rígido en movimiento y deduzca las condiciones bajo las cuales esta cantidad física se conserva.
- Defina y obtenga el momento de inercia de un cuerpo rígido respecto a un eje, e infiera la diferencia entre el concepto de momento de inercia de un cuerpo rígido respecto a un eje y el concepto de masa.
- Defina el concepto de eje principal de inercia.
- Enuncie y aplique el teorema de Steiner o de los ejes paralelos.
- Obtenga la ecuación de movimiento para rotación pura de un cuerpo rígido.
- Obtenga y aplique la ecuación de movimiento para la rotación pura de un cuerpo rígido alrededor de un eje principal de inercia y alrededor de un eje no principal de inercia.
- Analice, para un cuerpo rígido, el movimiento combinado de traslación del centro de masa y rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- Obtenga las ecuaciones de movimiento de traslación del centro de masa y rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- Muestre la diferencia entre rodar deslizando y rodar sin deslizar.
- Obtenga y defina la energía cinética rotacional y la energía cinética total de un cuerpo rígido.

- Obtenga la energía total de un cuerpo rígido y analice la conservación de la energía total cuando un cuerpo rígido rueda sin deslizar.
- Analice el movimiento por rodadura de un cuerpo rígido y defina el concepto de eje instantáneo de rotación.
- Obtenga para un cuerpo la ecuación de movimiento alrededor del eje instantáneo de rotación.
- Obtenga y analice las condiciones bajo las cuales un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio estático.
- Identifique las condiciones bajo las cuales un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio estático, sometido a la acción bien sea de sólo dos fuerzas ó bien sea de sólo tres fuerzas.
- Aplicar las condiciones de equilibrio estático en una y dos dimensiones.

CONCEPTOS BASICOS

En esta unidad de dinámica de un cuerpo rígido, se definirán los siguientes conceptos que son básicos en el estudio del movimiento de cuerpos tratados bajo el modelo de cuerpo rígido: Cuerpo rígido, torque de una fuerza (τ), par de fuerzas o cupla, momento angular y su conservación en el caso de un cuerpo rígido (L), momento de inercia de un cuerpo rígido (I), relación entre el momento angular y el torque de una fuerza, movimiento de rotación pura, movimiento combinado de traslación y rotación, energía de un cuerpo rígido, rodadura, equilibrio de un cuerpo rígido.

4.1. Introducción

En las unidades anteriores se ha analizado la dinámica de los cuerpos que se pueden tratar bajo el modelo de partícula; esto ha sido posible ya que solo interesaba considerar el efecto de las fuerzas en lo que se refiere al movimiento de traslación.

En adición, en esta unidad se busca considerar otro tipo de movimiento que tienden a imprimir las fuerzas sobre los cuerpos, lo que hace que el modelo de partícula no sea válido, pues en su lugar el modelo útil es el de cuerpo rígido que se definirá en lo que sigue.

Un cuerpo rígido, es un caso particular de un sistema de muchas partículas (del orden de 10^{23} partículas por cm^3). Estas partículas deben cumplir la condición de que la separación entre cualquier pareja de ellas siempre permanece constante mientras el cuerpo se mueve, sin importar el tipo de fuerzas que actúen sobre él. Esta definición permite afirmar que un cuerpo rígido no se deforma bajo ninguna interacción con otros cuerpos.

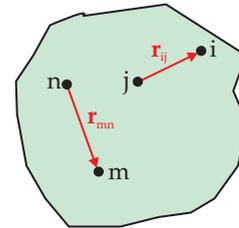


Figura 4.1: Cuerpo rígido.

De acuerdo con la definición de cuerpo rígido, en la figura 4.1 se hace necesario que las magnitudes r_{ij} y r_{mn} no cambien, condición que se debe cumplir para cualquier par de partículas que lo conformen.

Cuando un cuerpo rígido interactúa con otros cuerpos, las fuerzas que se generan tienden a imprimirle un movimiento de *traslación pura*, de *rotación pura* o un *movimiento combinado de traslación y rotación*.

4.1.1. Movimiento de traslación pura

Como se analizó en las unidades anteriores, se presenta un movimiento de *traslación pura* cuando el cuerpo cambia de posición sin cambiar su orientación, es decir, todos los puntos del cuerpo sufren el mismo desplazamiento a medida que transcurre el tiempo. De acuerdo con la figura 4.2, la partícula A y el centro de masa C.M., han tenido el mismo desplazamiento; esta es la razón por la cual, cuando se analiza el

movimiento de traslación, es suficiente considerar el movimiento del centro de masa del cuerpo. Es posible demostrar que el centro de masa, en lo que a traslación se refiere, se comporta como si toda la masa estuviera concentrada en dicho punto y como si todas las fuerzas externas actuaran sobre él.

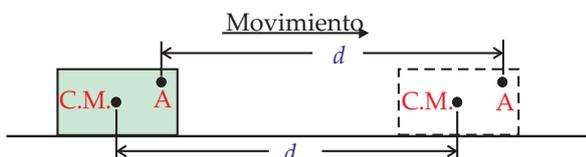


Figura 4.2: *Traslación pura de un cuerpo rígido.*

Por ello, para analizar el movimiento de traslación de un cuerpo rígido se utilizan los mismos métodos empleados para la dinámica de una partícula, teniendo en cuenta que el centro de masa es la partícula de interés. O sea, para el movimiento de traslación de un cuerpo rígido de masa constante m , la segunda ley de Newton adquiere la forma

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_c,$$

donde \mathbf{F} es la fuerza neta o resultante y \mathbf{a}_c la aceleración del centro de masa del cuerpo.

4.1.2. Movimiento de rotación pura

Un cuerpo rígido posee un movimiento de *rotación pura*, cuando cambia su orientación mientras se mueve, de tal forma que todas las partículas que lo conforman describen trayectorias circulares con centro en el eje de rotación. En estas condiciones, el centro de rotación permanece fijo respecto a un sistema de referencia fijo en tierra.

Como se ilustra en la figura 4.3, mientras el cuerpo rota alrededor de un eje fijo que pasa por el punto O , las partículas i y j describen circunferencias concéntricas con centro en el eje que pasa por dicho punto.

4.1.3. Movimiento combinado de traslación y rotación

Un cuerpo rígido puede tener dos movimientos simultáneos uno de traslación y otro de

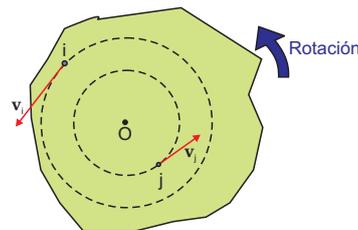


Figura 4.3: *Rotación pura de un cuerpo rígido.*

rotación, es decir, el movimiento más general de un cuerpo rígido, se puede considerar como una combinación de traslación y rotación. Lo anterior, permite encontrar un sistema de referencia en traslación, pero no rotante, respecto al cual el movimiento parezca solamente de rotación.

Como se observa en la figura 4.4, el movimiento del cuerpo al pasar de la posición (1) a la posición (2), se puede considerar como una traslación del centro de masa y una rotación alrededor de un eje que pasa a través del centro de masa. Este movimiento combinado, genera diferentes desplazamientos a las diferentes partículas que conforman el cuerpo rígido. Así, el desplazamiento del centro de masa es diferente al desplazamiento de la partícula A y en general se presenta esta situación para todas las partículas del cuerpo.

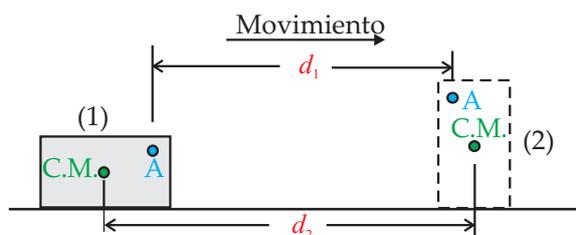


Figura 4.4: *Movimiento de traslación y rotación.*

4.2. Torque de una fuerza respecto a un punto(θ)

Como es sabido, una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre un cuerpo rígido se puede descomponer en sus componentes rectangulares F_x , F_y y F_z , que miden la tendencia de la fuerza a desplazar el

cuerpo en las direcciones x , y y z , respectivamente.

También se sabe que si a un cuerpo rígido se le aplica una fuerza, esta tiende a imprimirle tanto un movimiento de traslación como de rotación, alrededor de un eje que pasa por un punto del cuerpo rígido, tal como O en la figura 4.5.

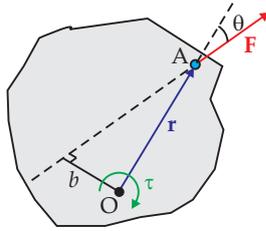


Figura 4.5: Torque de la fuerza \mathbf{F} respecto al punto O .

En esta unidad interesa considerar primero, el efecto de rotación que las fuerzas tienden a imprimirle a los cuerpos rígidos alrededor de un eje que pasa por un punto. La tendencia de una fuerza \mathbf{F} a imprimirle un movimiento de rotación a un cuerpo rígido alrededor de un punto, se mide mediante el concepto de *momento o torque*. En otras palabras, el torque es una medida de la cantidad de rotación que una fuerza tiende a imprimirle a un cuerpo rígido, respecto a un punto.

Para definir esta cantidad física, se considera la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre el cuerpo rígido de la figura 4.5. Necesariamente, el efecto de rotación del cuerpo rígido alrededor de un eje que pasa por el punto O , depende de la *magnitud, dirección y punto de aplicación* de la fuerza. Adicionalmente, la posición del punto de aplicación A , se establece en forma conveniente por medio del vector posición \mathbf{r} que une el punto de referencia o *centro de torques* O con el punto de aplicación A .

Se define el momento o torque τ de la fuerza \mathbf{F} , respecto al punto O , como el producto cruz o vectorial de los vectores \mathbf{r} y \mathbf{F} en ese orden, es decir,

$$\boldsymbol{\tau}_O \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (4.1)$$

De acuerdo con la definición de producto vectorial ó producto cruz, el torque $\boldsymbol{\tau}_O$ es perpendi-

cular al plano formado por el vector posición \mathbf{r} y el vector fuerza \mathbf{F} , o lo que es igual, el torque es perpendicular tanto al vector posición \mathbf{r} como al vector fuerza \mathbf{F} . Por otro lado, el sentido de $\boldsymbol{\tau}_O$ está definido por el sentido de rotación que alinearía a \mathbf{r} con \mathbf{F} . En el caso de la figura 4.5, sería en el sentido de movimiento de las manecillas del reloj para un observador no rotante situado en O . Este sentido coincide con el sentido de rotación de un tornillo de rosca derecha.

Otra forma de obtener el sentido de rotación, en el caso de rotación en un plano, es mediante la regla de la mano derecha, que consiste en lo siguiente: se coloca la mano abierta paralelamente al vector posición y luego se cierra en el sentido del ángulo menor formado por los vectores \mathbf{r} y \mathbf{F} . Procediendo de esta forma, el pulgar apunta en el sentido de $\boldsymbol{\tau}_O$, que para el caso de la figura 4.5 apunta perpendicularmente hacia la hoja.

Como en tres dimensiones el vector posición está dado en componentes rectangulares por $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y el vector fuerza por $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$, se puede determinar el torque de la fuerza, respecto a un eje que pasa por el punto O , mediante el determinante

$$\boldsymbol{\tau}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Resolviendo el determinante se obtiene

$$\boldsymbol{\tau}_O = (yF_z - zF_y)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

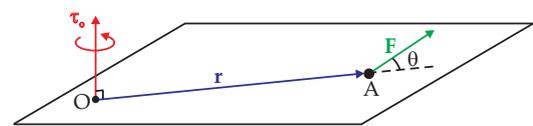


Figura 4.6: Posiciones relativas de \mathbf{r} , \mathbf{F} y $\boldsymbol{\tau}_O$.

En la figura 4.6, se muestran las direcciones relativas de los vectores \mathbf{r} , \mathbf{F} y $\boldsymbol{\tau}_O$, donde se observa la condición de perpendicularidad entre el plano formado por los vectores \mathbf{r} y \mathbf{F} con el vector $\boldsymbol{\tau}_O$.

Expresando el torque de la fuerza \mathbf{F} en la forma $\boldsymbol{\tau}_O = \tau_x\mathbf{i} + \tau_y\mathbf{j} + \tau_z\mathbf{k}$, las componentes rectangulares τ_x, τ_y y τ_z miden la tendencia de la

fuerza a imprimir al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x , y y z , respectivamente.

En el caso particular que \mathbf{r} y \mathbf{F} se encuentren en el plano xy , como en la figura 4.7, se tiene $z = 0$ y $F_x = 0$, por lo que el torque queda expresado por

$$\boldsymbol{\tau}_o = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}, \quad (4.2)$$

cuya magnitud está dada por $\tau_o = xF_y - yF_x$ y corresponde a un vector paralelo al eje z .

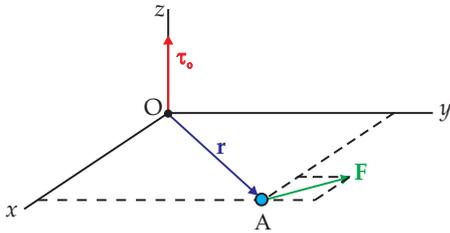


Figura 4.7: Dirección de $\boldsymbol{\tau}$ con \mathbf{r} y \mathbf{F} en el plano xy .

Sabiendo que en la figura 4.5, θ es el ángulo menor entre el vector posición \mathbf{r} y la línea de acción de la fuerza \mathbf{F} , por definición de producto vectorial, ecuación (4.1), la magnitud del torque está dada por

$$\tau = rF\sin\theta = F(rs\sin\theta). \quad (4.3)$$

En la figura 4.5 se observa que $b = rs\sin\theta$, o sea que la ecuación (4.3) se transforma en

$$\tau = Fb, \quad (4.4)$$

donde b es la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de la fuerza \mathbf{F} y se conoce como el *brazo de palanca* o *brazo de la fuerza*.

De la ecuación (4.4), se puede concluir que la efectividad en la rotación que tiende a imprimir la fuerza \mathbf{F} sobre el cuerpo rígido, aumenta con el aumento del brazo b . Un ejemplo de esto se presenta cuando se trata de abrir o cerrar una puerta, ya que entre más lejos de las bisagras se aplique la fuerza con mayor facilidad esta adquiere movimiento de rotación.

En síntesis, de lo anterior se puede afirmar: *El torque mide la tendencia de la fuerza \mathbf{F} a hacer rotar*

o girar al cuerpo alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de $\boldsymbol{\tau}$.

Igualmente se nota en la figura 4.5, que la fuerza \mathbf{F} se puede desplazar a lo largo de su línea de acción sin cambiar el torque, hecho conocido como el *principio de transmisibilidad*. En otras palabras, los efectos físicos de traslación y rotación no varían en absoluto cuando se lleva a cabo esta operación. Ello permite afirmar que no se tiene un punto de aplicación, sino una línea de aplicación, así, la expresión $\tau = xF_y - yF_x$ para el caso de dos dimensiones, corresponde a la ecuación de la línea de acción de la fuerza cuyo torque es $\boldsymbol{\tau}$, siendo x y y arbitrarios.

Dimensiones y unidades de torque

De acuerdo con la ecuación (4.4), se tiene que la dimensión de torque está dada por la dimensión de fuerza multiplicada por la dimensión de brazo, es decir, $[F][b]$ que es la forma como se acostumbra expresarla, para no confundirla con las dimensiones de trabajo y energía. Por consiguiente, la unidad de torque en el sistema internacional de unidades es $\text{N} \cdot \text{m}$; en el sistema gaussiano $\text{dina} \cdot \text{cm}$ y en el sistema inglés $\text{lb} \cdot \text{p}$. Otra unidad que se emplea en algunos casos es el kilogramo-fuerza por metro, representado por $\text{kgf} \cdot \text{m}$.

En el caso particular de dos dimensiones, es común emplear la expresión $\tau = Fb$ que sólo permite obtener la magnitud del torque. Pero como en dos dimensiones el cuerpo rígido puede rotar en dos sentidos, es necesario tener una convención de signos. De acuerdo con la figura 4.8, el torque se toma positivo cuando el cuerpo rígido rota en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo al rotar en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

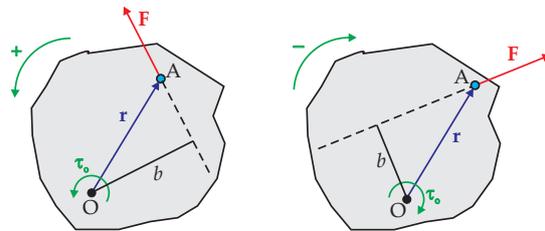
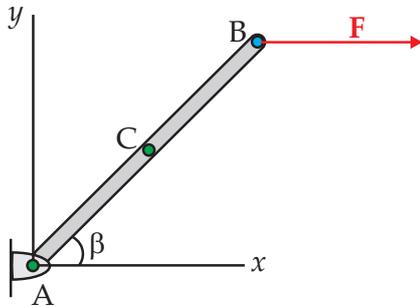


Figura 4.8: Convención de signos para $\boldsymbol{\tau}$.

Ejemplo 4.1.

La varilla AB de la figura tiene longitud L y está sometida a la fuerza horizontal F . Utilizando la ecuación (4.1), determine el torque de la fuerza respecto al extremo A y respecto al punto medio C. Compare los resultados obtenidos.

**Solución**

Respecto al punto A, las componentes rectangulares del vector posición y de la fuerza están dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= L(\cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}) \\ \mathbf{F} &= F \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Efectuando el producto vectorial entre estos vectores, se encuentra que el torque de la fuerza respecto al punto A es

$$\tau_A = -(FL \sin \beta) \mathbf{k}. \quad (1)$$

Operando en forma similar, con

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \frac{1}{2}L(\cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}) \\ \mathbf{F} &= F \mathbf{i}, \end{aligned}$$

el torque de la fuerza respecto al punto medio C, está dado por

$$\tau_C = -\frac{1}{2}(FL \sin \beta) \mathbf{k}. \quad (2)$$

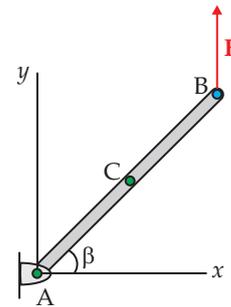
De acuerdo con las ecuaciones (1) y (2), se tiene

- i) En ambos casos el torque es un vector que entra perpendicularmente al plano de la hoja, esto es, apunta en el sentido negativo del eje z . De este modo, la fuerza tiende a generar una rotación sobre la varilla en sentido horario.
- ii) Para una orientación fija de la varilla, es mayor la cantidad de rotación que tiende a imprimir la fuerza respecto al punto A, al compararla con la rotación que tiende a imprimir respecto al punto C.

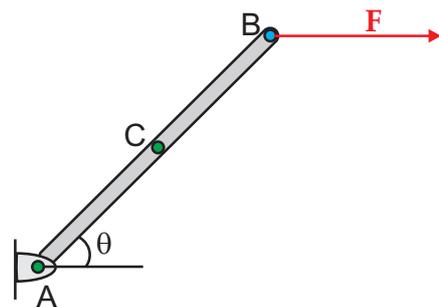
- iii) En los dos casos, aunque con diferentes valores, la máxima rotación se obtiene para $\beta = 90^\circ$, es decir, cuando la fuerza aplicada es perpendicular a la varilla.

Ejercicio 4.1.

La varilla AB de la figura tiene longitud L y está sometida a la fuerza vertical F . Utilizando la ecuación (4.1), determine el torque de la fuerza respecto al extremo A y respecto al punto medio C, si la fuerza está dirigida a) hacia arriba, b) hacia abajo. Compare los resultados obtenidos.

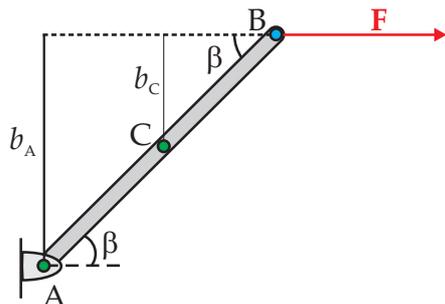
**Ejemplo 4.2.**

La varilla AB de la figura tiene longitud L y está sometida a la fuerza horizontal F . Utilizando la ecuación (4.4), determine el torque de la fuerza respecto al extremo A y respecto al punto medio C. Compare los resultados obtenidos.

**Solución**

De acuerdo con la figura, la magnitud del torque de la fuerza F , respecto al extremo A, donde el brazo de la fuerza es $b_A = L \sin \beta$, está dado por

$$\tau_A = F(L \sin \beta). \quad (1)$$



Igualmente, con $b_C = \frac{1}{2}L\text{sen}\beta$, el torque respecto al punto medio de la varilla es

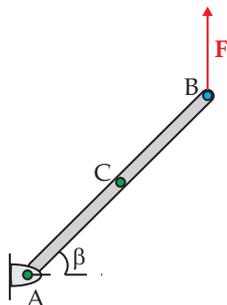
$$\tau_C = F\left(\frac{1}{2}L\text{sen}\beta\right). \quad (2)$$

Mediante la regla de la mano derecha, se encuentra que la rotación en ambos casos coincide con el sentido de rotación de las manecillas del reloj, como se encontró en el ejemplo 4.1.

Al comparar las ecuaciones (1) y (2), se observa que entre mayor sea el brazo de la fuerza, mayor es la rotación que la fuerza tiende a imprimir sobre la varilla, o sea, $\tau_A > \tau_C$.

Ejercicio 4.2.

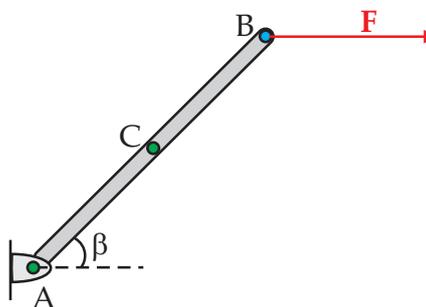
La varilla AB de la figura tiene longitud L y está sometida a la fuerza vertical F . Utilizando la ecuación (4.4), determine el torque de la fuerza respecto al extremo A y respecto al punto medio C, si la fuerza está dirigida a) hacia arriba, b) hacia abajo. Compare los resultados obtenidos.



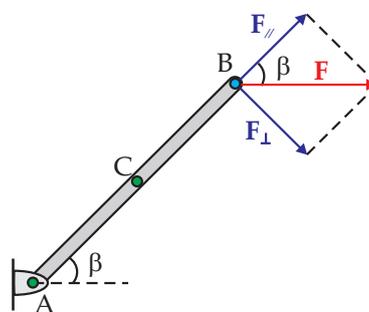
Ejemplo 4.3.

La varilla AB de la figura tiene longitud L y está sometida a la fuerza horizontal F . Halle el torque de la fuerza respecto al extremo A y respecto al punto medio C,

descomponiendo la fuerza en una componente paralela a la varilla y una componente perpendicular a ella. Compare los resultados obtenidos.



Solución



En este caso, como lo muestra la figura, la línea de acción de la componente paralela $F \cos \beta$, pasa por los puntos A y C, esto es, su brazo es cero y por consiguiente dicha componente no tiende a generar rotación sobre la varilla. Por otro lado, el brazo de la componente perpendicular, $F \text{sen} \beta$, coincide con la longitud de la varilla para el punto A y con la mitad de la longitud de la varilla para el punto medio C. Así, mediante la ecuación (4.4), se obtiene

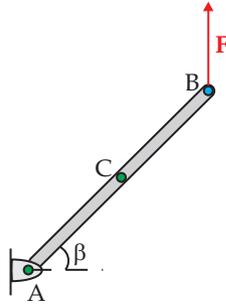
$$\begin{aligned} \tau_A &= F(L\text{sen}\beta) \\ \tau_C &= F\left(\frac{1}{2}L\text{sen}\beta\right). \end{aligned}$$

con rotación de la varilla en el sentido de las manecillas del reloj. Estos resultados son idénticos a los encontrados en los ejemplos 4.1 y 4.2.

Ejercicio 4.3.

La varilla AB de la figura tiene longitud L y está sometida a la fuerza vertical F . Encuentre el torque de la fuerza respecto al

extremo A y respecto al punto medio C, descomponiendo la fuerza en una componente paralela a la varilla y una componente perpendicular a ella, si la fuerza está dirigida a) hacia arriba, b) hacia abajo. Compare los resultados obtenidos.



4.3. Torque de un par de fuerzas o cupla

En la figura 4.9, las fuerzas F_1 y F_2 forman un par de fuerzas o cupla si cumplen simultáneamente las tres condiciones siguientes

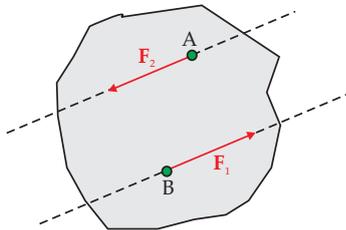


Figura 4.9: Par de fuerzas o cupla.

- i) Las fuerzas son de igual magnitud, esto es, $F_1 = F_2$.
- ii) Sus líneas de acción son paralelas, pero no superpuestas.
- iii) Los sentidos de las fuerzas son opuestos, es decir, $F_1 = -F_2$.

4.3.1. Efectos de traslación de un par de fuerzas

Ya que $F_1 + F_2 = F_1 + (-F_1) = 0$, la suma o resultante de las dos fuerzas es cero, así, un par

de fuerzas no tiende a generar ningún efecto de traslación cuando se aplica a un cuerpo rígido.

4.3.2. Efectos de rotación de un par de fuerzas

Para considerar los efectos de rotación, es necesario determinar el torque total o resultante de las dos fuerzas cuando actúan sobre el cuerpo rígido. Para ello se considera el par de fuerzas de la figura 4.10.

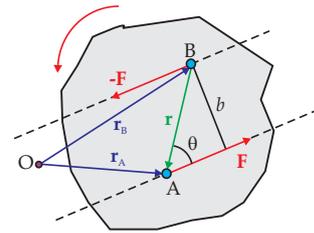


Figura 4.10: Torque de un par de fuerzas o cupla.

La suma vectorial de los torques de las fuerzas F y $-F$, respecto al punto arbitrario O , está dada por

$$\begin{aligned}\tau &= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) \\ &= (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Si en la ecuación (4.5) se hace la definición $r \equiv r_A - r_B$, siendo r el brazo de palanca del par, se tiene

$$\tau = r \times F, \quad (4.6)$$

donde τ es llamado el *momento o torque del par* y es un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas y cuya magnitud es

$$\tau = rF \sin \theta = Fb,$$

donde b es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las dos fuerzas, como lo muestra la figura 4.10.

El resultado dado por la ecuación (4.6), muestra que τ no depende del punto de referencia O , es decir, que el torque de un par de fuerzas o cupla es un vector libre, ya que r es independiente del centro de torques O .

En algunos casos, dos pares de fuerzas tienen momentos o torques iguales en magnitud y dirección; cuando esto ocurre, se dice que los dos

pares son equivalentes ya que tienden a generar los mismos efectos de rotación al actuar, por separado, sobre un cuerpo rígido. Esta situación se ilustra en la figura 4.11, donde $F_1 b_1 = F_2 b_2$.

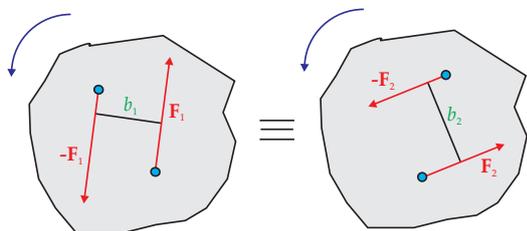


Figura 4.11: Pares equivalentes.

4.4. Descomposición de una fuerza en un sistema fuerza-par

En el cuerpo rígido mostrado en la figura 4.12, se desea trasladar el punto de aplicación de la fuerza F del punto A al punto O , sin cambiar los efectos tanto de traslación como de rotación sobre el cuerpo rígido. De acuerdo con el principio de transmisibilidad, se sabe que si la fuerza se desliza a lo largo de su línea de acción, no cambian los efectos de traslación ni de rotación; pero si se desplaza al punto O , por fuera de su línea de acción, se modifican los efectos de rotación sobre el cuerpo rígido, aunque los efectos de traslación permanecen inalterados, ya que no se cambia la magnitud de la fuerza.

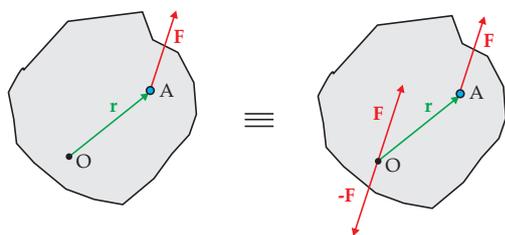


Figura 4.12: Sistema fuerza-par.

Para que los efectos de rotación sobre el cuerpo rígido no cambien, al llevar a cabo la operación anterior, se procede de la forma siguiente. En el punto O se aplican las fuerzas F y $-F$ que no modifican ninguna acción sobre el cuerpo

rígido, ya que su resultante es cero y el torque neto de ellas respecto a O es nulo.

De este modo, la fuerza F aplicada en el punto A y $-F$ aplicada en el punto O , forman un par cuyo torque es $\tau = r \times F$, o sea, se ha logrado encontrar una fuerza F aplicada en O y un par de torque τ aplicado en el mismo punto. En esta disposición, conocida como *sistema fuerza-par*, F responde por los mismos efectos de traslación y el par de torque τ por los mismos efectos de rotación, que tiende a imprimir la fuerza única F aplicada inicialmente en el punto A .

Si en la figura 4.12, el vector posición r y la fuerza F aplicada en A , se encuentran en el plano de la hoja, el sistema *fuerza-par* se representa en la forma mostrada en la figura 4.13, donde τ es el torque del par correspondiente.

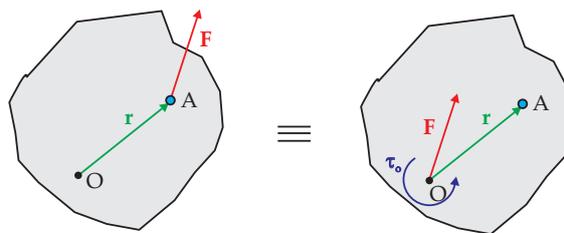


Figura 4.13: Sistema fuerza-par en un plano.

De lo anterior, se puede afirmar: *Cualquier fuerza F que actúe sobre un cuerpo rígido, se puede desplazar a un punto arbitrario O , siempre que se agregue un par de momento igual al torque de F respecto al punto O .*

El par tiende a imprimir al cuerpo rígido los mismos efectos de rotación respecto a O que la fuerza F tendía a generar antes de trasladarla a dicho punto, es decir, que la fuerza única aplicada en A y el sistema fuerza-par correspondiente, son físicamente equivalentes.

Cuando actúan varias fuerzas sobre el cuerpo rígido, concurrentes o no, se lleva a cabo la operación anterior con cada una de las fuerzas, obteniéndose un par resultante y un sistema de fuerzas concurrentes aplicadas en O , que se puede reemplazar por una fuerza única o resultante. Así, se obtiene un sistema *fuerza-par* formado por la fuerza neta F y el par resultante τ ,

dados respectivamente por

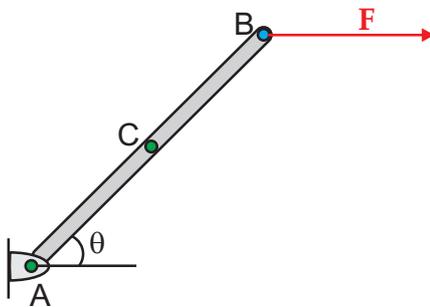
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i, \\ \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 + \dots \\ &= \sum_i \boldsymbol{\tau}_i. \end{aligned}$$

En conclusión: Siempre es posible reemplazar cualquier sistema de fuerzas por un sistema fuerza-par, de tal forma que la fuerza se escoge igual a \mathbf{F} para la equivalencia traslacional y el par con torque igual a $\boldsymbol{\tau}$, se escoge para la equivalencia rotacional.

Como se verá posteriormente, cuando se analice el movimiento combinado de traslación y rotación de un cuerpo rígido, se tratarán por separado los efectos de traslación y rotación, esto es, las fuerzas aplicadas se reemplazarán por un sistema fuerzas-par equivalente.

Ejemplo 4.4.

La varilla AB de la figura tiene longitud L y está sometida a la fuerza horizontal \mathbf{F} . Reemplazar la fuerza horizontal, por un sistema fuerza-par aplicado a) En el extremo A. b) En el punto medio C.



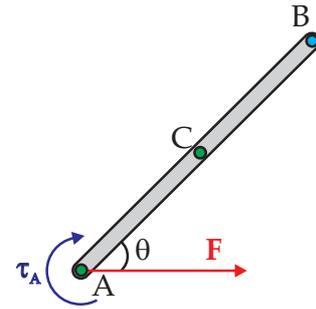
Solución

a) Para que no cambien los efectos de traslación que la fuerza tiende a imprimir sobre la varilla, la fuerza aplicada en A debe ser la misma, esto es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_i.$$

Por otro lado, los efectos de rotación no cambian si en A se aplica un par equivalente, igual al torque de la fuerza aplicada en B y evaluado respecto al punto A, o sea

$$\boldsymbol{\tau}_A = -(FL\text{sen}\theta)\mathbf{k}$$

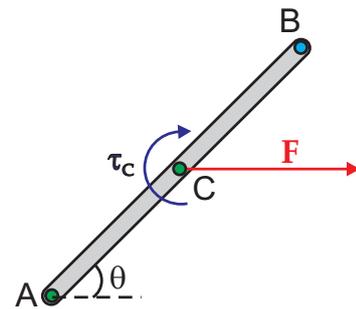


En la figura se muestra el sistema fuerza-par equivalente, aplicado en el extremo A de la varilla.

b) En el punto C la fuerza aplicada debe ser la misma que en caso anterior, pero el par debe tener un torque, respecto al punto C, igual a

$$\boldsymbol{\tau}_C = -\frac{1}{2}(FL\text{sen}\theta)\mathbf{k}$$

En este caso, el sistema fuerza-par equivalente en el punto medio de la varilla, se muestra en la figura.

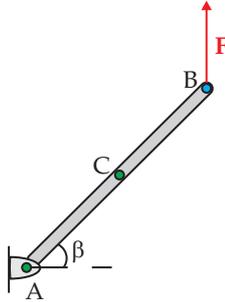


De los dos resultados anteriores se observa que el torque del par es diferente al tomar distintos puntos. Esto debe ser así ya que la fuerza tiende a imprimir diferentes efectos de rotación respecto a puntos distintos. Sin embargo, independientemente del punto donde se aplique el sistema fuerza-par equivalente, los efectos de traslación no cambian siempre y cuando no se cambien la magnitud ni la dirección de la fuerza dada.

Ejercicio 4.4.

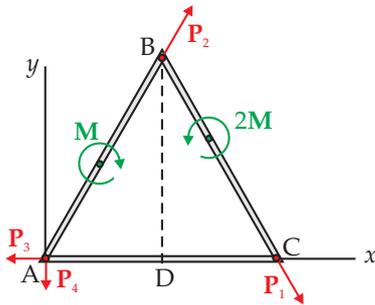
La varilla AB de la figura tiene longitud L y está sometida a la fuerza vertical \mathbf{F} , dirigida hacia arriba. Reemplazar la fuerza, por un sistema fuerza-par aplicado a) En

el extremo A. b) En el punto medio C. Resuelva de nuevo la situación suponiendo que la fuerza está dirigida hacia abajo.



Ejemplo 4.5.

La escuadra de la figura, que es un triángulo equilátero de lado d , está sometida a fuerzas en sus tres vértices y a los dos pares M y $2M$. Las magnitudes de las fuerzas están dadas por $P_1 = P$, $P_2 = 2P$, $P_3 = \frac{2}{3}P$ y $P_4 = \frac{1}{2}P$. Reemplazar el sistema de fuerzas y los dos pares, por un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el vértice A.



Solución

Teniendo en cuenta que las fuerzas P_1 y P_2 forman ángulos de 60° con la dirección positiva del eje x , ya que el triángulo es equilátero, la fuerza resultante equivalente al sistema de fuerzas, está dada en componentes rectangulares por

$$F = P(0.83i + 0.37j).$$

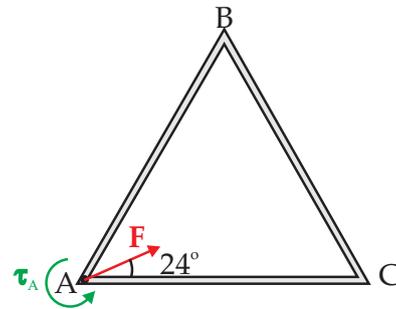
Utilizando el teorema de Pitágoras y la definición de la función tangente, se encuentra que en magnitud y dirección la fuerza resultante está dada por

$$F = 0.91P \angle 24^\circ$$

Calculando los torques de las fuerzas respecto al punto A y sumando los pares M y $2M$, teniendo en cuenta su respectivo signo, para el par resultante se obtiene

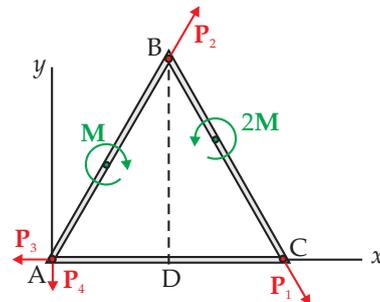
$$\tau_A = (M - 0.87Pd)k.$$

El sistema fuerza-par, formado por F y τ_A , se muestra en la figura siguiente, y responde por los mismos efectos de traslación y rotación que las fuerzas y los dos pares simultáneamente aplicados, tienden a imprimir sobre la escuadra. En la figura se supone que $M > 0.87Pd$, en caso contrario, la tendencia a la rotación sería en sentido opuesto.



Ejercicio 4.5.

La escuadra de la figura es un triángulo equilátero de lado d y está sometida a fuerzas en sus tres vértices y a los dos pares M y $2M$. Las magnitudes de las fuerzas están dadas por $P_1 = P$, $P_2 = 2P$, $P_3 = \frac{2}{3}P$ y $P_4 = \frac{1}{2}P$. Reemplazar el sistema de fuerzas y los dos pares, por un sistema fuerza-par equivalente aplicado a) En el punto B. b) En el punto C.



4.5. Resultante de un sistema de fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido

Si sobre un cuerpo rígido actúan varias fuerzas, aplicadas en diferentes puntos, es necesario considerar por separado los efectos de traslación y de rotación.

Los efectos de traslación sobre el cuerpo, quedan determinados por el vector suma o resultante de las fuerzas, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots \\ &= \sum \mathbf{F}_i, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde se opera en la misma forma que para una partícula sometida varias fuerzas.

De forma similar, los efectos de rotación sobre el cuerpo rígido, están determinados por el vector suma de los torques de las fuerzas, evaluados respecto al mismo punto de referencia, es decir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 + \dots \\ &= \sum \boldsymbol{\tau}_i. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pero ¿qué se puede decir respecto al punto de aplicación de la fuerza resultante? Como respuesta, se tiene que no siempre es posible reemplazar este sistema de fuerzas por una fuerza única que sea equivalente, ya que sólo es posible hacerlo cuando \mathbf{F} y $\boldsymbol{\tau}$, obtenidos mediante las ecuaciones (4.7) y (4.8), sean perpendiculares entre sí, ya que sólo de esta manera se satisface la definición $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, la cual permite determinar el vector posición \mathbf{r} , para el punto de aplicación de la fuerza respecto al centro de torques.

Si la condición anterior se satisface ($\boldsymbol{\tau}$ perpendicular a \mathbf{F}), la fuerza \mathbf{F} así aplicada es equivalente al sistema, tanto en lo referente a rotación como a traslación. Sin embargo, esto no siempre es posible ya que en muchos casos $\boldsymbol{\tau}$ y \mathbf{F} no son perpendiculares.

En general, *un sistema de fuerzas no concurrentes que actúan sobre un cuerpo rígido, no siempre es posible reducirlo a una fuerza única que sea equivalente.*

Sin embargo, cuando se trata de un sistema de fuerzas *concurrentes, coplanares o paralelas*,

siempre es posible reemplazar el sistema de fuerzas por una fuerza única que es completamente equivalente al sistema dado, pues en estos tres casos se satisface la condición de perpendicularidad entre $\boldsymbol{\tau}$ y \mathbf{F} .

4.5.1. Resultante de un sistema de fuerzas concurrentes

Se considera el caso de varias fuerzas concurrentes actuando sobre un cuerpo rígido y que están aplicadas en el punto A, como se muestra en la figura 4.14.

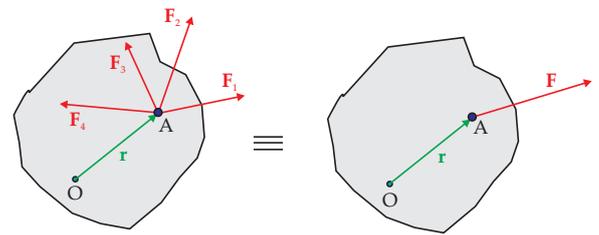


Figura 4.14: Resultante de varias fuerzas concurrentes.

El torque de la fuerza resultante \mathbf{F} , está dado por

$$\boldsymbol{\tau}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (4.9)$$

donde la resultante del sistema de fuerzas aplicadas al cuerpo rígido, se obtiene mediante la expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots \\ &= \sum \mathbf{F}_i. \end{aligned}$$

En este caso, el vector posición \mathbf{r} es común al punto de aplicación de todas las fuerzas concurrentes aplicadas, respecto al centro de torques o centro de rotación O.

De este modo, la ecuación (4.9) adquiere la forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_O &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 + \dots \\ &= \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F}_i, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la propiedad distributiva del producto vectorial respecto a la suma, y

de este modo, el torque total es perpendicular a la fuerza neta F . Así,

$$\begin{aligned} \tau_o &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots \\ &= \sum \tau_i. \end{aligned}$$

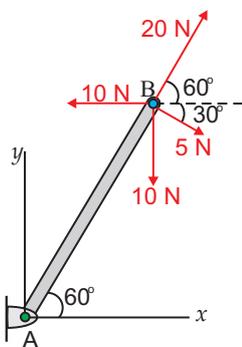
En conclusión, *el torque con respecto al punto O de la resultante de varias fuerzas concurrentes, es igual a la suma de los torques de las distintas fuerzas aplicadas, respecto al mismo punto O*. Enunciado conocido como el *teorema de Varignon*.

En el caso particular que todas las fuerzas concurrentes sean coplanares y O se encuentra en el mismo plano, cada uno de los torques tiene la misma dirección perpendicular al plano, igual que el torque resultante.

Como un resultado general, se tiene que *un sistema de fuerzas concurrentes siempre se puede reemplazar por una sola fuerza, su resultante, la que es completamente equivalente al sistema en lo que respecta a efectos de traslación y rotación, como se ilustra en la figura 4.14.*

Ejemplo 4.6.

Reemplazar el sistema de fuerzas que actúan en el extremo B de la varilla mostrada en la figura, por una fuerza única equivalente.



Solución

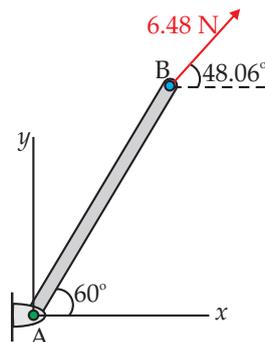
Utilizando el sistema de coordenadas mostrado en la figura, se encuentra que la resultante de las fuerzas concurrentes aplicadas en el extremo B de la varilla, está dada en componentes rectangulares por Utilizando el sistema de coordenadas mostrado en la figura, se encuentra que la resultante de las fuerzas concurrentes aplicadas en el extremo B de la varilla, está dada en componentes rectangulares por

$$F = (4.33i + 4.82j)N,$$

o expresándola en magnitud y dirección

$$F = 6.48 \text{ N } \angle 48.06^\circ$$

En la siguiente figura, se muestra la fuerza única que responde por los mismos efectos de traslación y rotación que tienden a generar las cuatro fuerzas simultáneamente aplicadas en el extremo B de la varilla.



Ejercicio 4.6.

Compruebe el teorema de Varignon, para la situación planteada en el ejemplo 4.6.

4.5.2. Resultante de un sistema de fuerzas coplanares

En la figura 4.15, se tiene un sistema de fuerzas coplanares actuando sobre un cuerpo rígido.

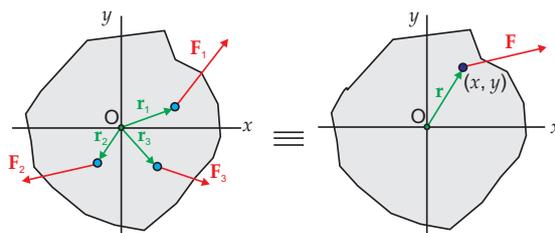


Figura 4.15: *Resultante de varias fuerzas coplanares.*

Para el sistema de coordenadas mostrado en la figura 4.15, donde el origen O se hace coincidir con el punto de rotación o centro de torques, se tiene que tanto los torques individuales $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ como el torque total τ , son perpendiculares al plano xy , esto es, la fuerza resultante F es perpendicular al torque neto τ . Así,

es posible aplicar la fuerza resultante \mathbf{F} en un punto cuyo torque τ esta dado por la expresión $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde \mathbf{r} es el vector posición del punto de aplicación de la fuerza \mathbf{F} respecto a O . En este caso, de acuerdo con la ecuación 4.2, la relación vectorial se puede reemplazar por la ecuación escalar

$$\tau = xF_y - yF_x \quad (4.10)$$

donde F_x y F_y son las componentes rectangulares de la fuerza resultante \mathbf{F} , x y y las componentes rectangulares del vector posición \mathbf{r} donde debe aplicarse la fuerza \mathbf{F} .

De este modo, la fuerza única equivalente se debe aplicar en un punto de coordenadas (x, y) tal que se satisfaga la ecuación (4.10). Esta expresión, corresponde a la ecuación de la línea de acción de la fuerza resultante, es decir, hay una línea de aplicación, ya que esta puede deslizarse a lo largo de su línea de acción sin cambiar los efectos físicos, de acuerdo con el principio de transmisibilidad.

En síntesis, cuando un sistema de fuerzas coplanares actúa sobre un cuerpo rígido, siempre es posible reducir el sistema a una sola fuerza \mathbf{F} , ya que en este caso el torque neto es perpendicular a la fuerza resultante \mathbf{F} . Este resultado se cumple aunque el centro de torques se encuentre fuera del plano de las fuerzas.

Se presenta una excepción a esta regla y es cuando $\mathbf{F} = 0$ y $\tau \neq 0$, pues en este caso el sistema corresponde a un par de fuerzas o cupla, que sólo tiende a imprimir efectos de rotación.

Ejemplo 4.7.

Determine, sobre el lado AC y sobre la altura BD , el punto de corte de la línea de acción de la fuerza única que es equivalente al sistema fuerza-par mostrado en la figura, obtenido en el ejemplo 4.5.

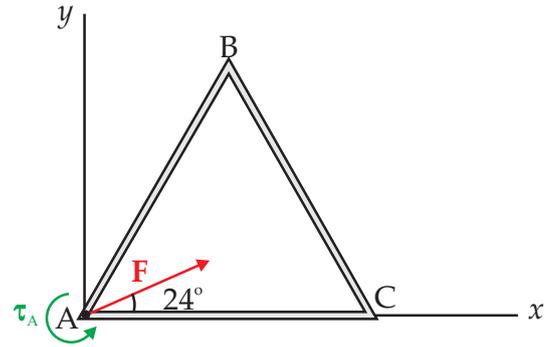
Solución

De acuerdo con el ejemplo 4.5, la fuerza resultante en componentes rectangulares está dada por

$$\mathbf{F} = P(0.83\mathbf{i} + 0.37\mathbf{j}),$$

y el par resultante por

$$\tau_A = (M - 0.87Pd)\mathbf{k}.$$



Mediante la ecuación (4.10), se encuentra que la ecuación de la línea de acción de la fuerza única equivalente, adquiere la forma

$$M - 0.87Pd = 0.37Px - 0.83Py.$$

Respecto al sistema de referencia mostrado en la figura, sobre la recta AC $y = 0$, así, la línea de acción de la resultante corta el eje x en

$$x = 2.7 \frac{M - 0.87Pd}{P}.$$

Por otro lado, la altura BD pasa por $x = d/2$, así que la línea de acción de la resultante corta la vertical en

$$y = 1.2 \frac{(1.06Pd - M)}{P}$$

Ejercicio 4.7.

Determine el punto de corte, con el eje x y con el eje y , de la línea de acción de la fuerza única correspondiente al sistema fuerza-par, del ejemplo 4.7.

4.5.3. Resultante de un sistema de fuerzas paralelas

En la figura 4.16, se tiene un sistema de fuerzas paralelas actuando sobre un cuerpo rígido, esto es, sus líneas de acción son paralelas y como se indica pueden o no estar orientadas en el mismo sentido.

Para el análisis que sigue y para mayor claridad, se toma como referencia el vector unitario \mathbf{u} , el cual permite expresar la fuerza resultante en la forma vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 \cdots \\ &= (-\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 - \mathbf{F}_4 + \cdots)\mathbf{u} \\ &= \left(\sum \mathbf{F}_i\right)\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

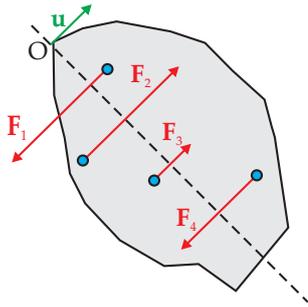


Figura 4.16: Resultante de varias fuerzas paralelas.

así, la fuerza resultante \mathbf{F} es paralela al vector unitario \mathbf{u} , y su magnitud es

$$F = -F_1 + F_2 + F_3 - F_4 + \dots = \sum F_i.$$

Además, la suma vectorial de los torques, respecto al punto O, está dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 + \mathbf{r}_4 \times \mathbf{F}_4 + \dots = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (4.12)$$

Ahora, con $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{u}$, la ecuación (4.12) se transforma en

$$\boldsymbol{\tau} = \sum \mathbf{r}_i \times F_i \mathbf{u} = \left(\sum \mathbf{r}_i F_i \right) \times \mathbf{u}. \quad (4.13)$$

La ecuación (4.13) muestra que el torque resultante $\boldsymbol{\tau}$ es perpendicular al vector unitario \mathbf{u} , así, por la ecuación (4.11), también es perpendicular a la fuerza resultante \mathbf{F} .

Por lo tanto, en el caso de fuerzas paralelas siempre es posible reemplazar el sistema de fuerzas por una fuerza única equivalente, que responde por los mismos efectos de traslación y rotación, que las fuerzas paralelas simultáneamente aplicadas, tienden a imprimirle al cuerpo rígido.

De este modo, la fuerza equivalente \mathbf{F} se debe aplicar en una posición \mathbf{r}_c , tal que

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_c \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_c \left(\sum F_i \right) \times \mathbf{u}, \quad (4.14)$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación (4.11).

Las ecuaciones (4.13) y (4.14) se satisfacen únicamente si se cumple que

$$\mathbf{r}_c \left(\sum F_i \right) = \sum \left(\mathbf{r}_i F_i \right).$$

De esta forma, respecto a O, el vector posición del punto donde se debe aplicar la fuerza única \mathbf{F} está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c &= \frac{\sum \mathbf{r}_i F_i}{\sum F_i} \\ &= \frac{-\mathbf{r}_1 F_1 + \mathbf{r}_2 F_2 + \mathbf{r}_3 F_3 - \dots}{-F_1 + F_2 + F_3 - F_4 + \dots}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Expresando los vectores de la ecuación (4.15) en componentes rectangulares, se encuentra que las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza, para que los efectos sobre el cuerpo rígido no cambien, están dadas por

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}, \\ y_c &= \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i}, \\ z_c &= \frac{\sum z_i F_i}{\sum F_i}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Un ejemplo de esta situación se presenta en el caso del peso de un cuerpo, donde cada partícula, por tener masa, posee un peso y todos ellos corresponden a fuerzas paralelas. El punto donde se debe aplicar la fuerza resultante o peso del cuerpo, no es más que el centro de masa del cuerpo. En la figura 4.17 se muestra esta situación.

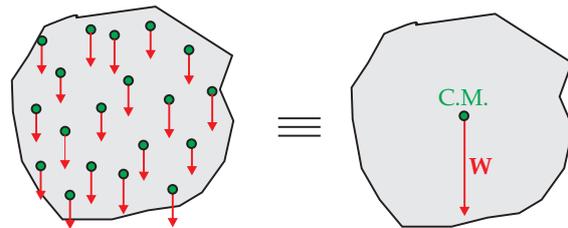
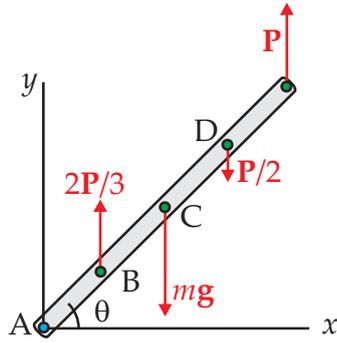


Figura 4.17: Peso de un cuerpo rígido.

Ejemplo 4.8.

Una barra uniforme de longitud L y masa m , se somete al sistema de fuerzas paralelas mostrado en la figura. La magnitud de la fuerza \mathbf{P} es $mg/2$ y además, $AB = CD = L/4$. a) Reemplazar las cuatro fuerzas por un sistema fuerza-par aplicado en el extremo A. b) Determine el punto de aplicación de la fuerza única equivalente.



Solución

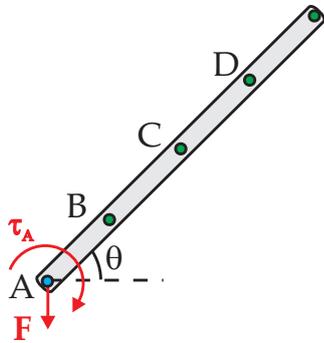
a) La fuerza neta equivalente al sistema de fuerzas paralelas al eje y es

$$\mathbf{F} = -\frac{5}{12}mg\mathbf{j}.$$

Luego de calcular los torques de las fuerzas respecto al punto A, se encuentra que el torque del par resultante está dado por

$$\tau_A = -\frac{5}{48}mgL\cos\theta\mathbf{k}.$$

Por lo tanto, el sistema fuerza-par equivalente está dado por la fuerza resultante \mathbf{F} y el torque neto τ , mostrados en la figura.

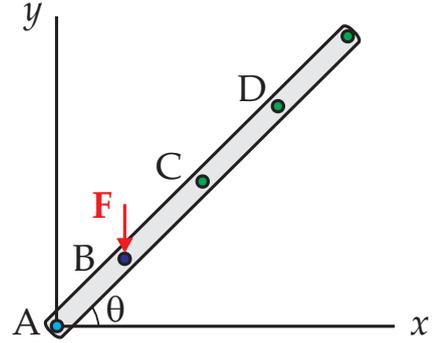


b) Mediante las ecuaciones (4.16), se encuentra que las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza única equivalente están dadas por

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{4}L\cos\theta \\ y_B &= \frac{1}{4}L\sin\theta. \end{aligned}$$

Como se muestra en la figura, la fuerza resultante \mathbf{F} debe aplicarse en el punto B.

En la tabla se muestra el valor de los coeficientes de L , en las expresiones para x_c, y_c correspondiente a diferentes valores



del ángulo θ .

θ	0	30	45	60	90
$\frac{1}{4}\cos\theta$	0.25	0.22	0.18	0.12	0.00
$\frac{1}{4}\sin\theta$	0.00	0.12	0.18	0.22	0.25

Se observa que al aumentar la inclinación de la barra, la coordenada x_c disminuye mientras que la coordenada y_c aumenta, pero con la fuerza \mathbf{F} actuando siempre sobre el punto B.

Ejercicio 4.8.

Resolver el ejemplo 4.8, tomando el origen de coordenadas a) En el punto C. b) En el punto D. Compare los resultados, con el obtenido en el ejemplo 4.8.

4.6. Vector momento angular de un cuerpo rígido

De acuerdo con la ecuación (2.20), el momento angular \mathbf{L}_i de una partícula i que describe una trayectoria curvilínea con velocidad \mathbf{v}_i , está dado por

$$\mathbf{L}_i = m_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i, \tag{4.17}$$

donde m_i es la masa de la partícula y \mathbf{r}_i es su vector posición respecto al origen de coordenadas.

En el caso de un cuerpo rígido, cuando rota alrededor de un eje determinado, esta definición sigue siendo válida para cualquier partícula. Además, si los momentos angulares de todas las partículas del cuerpo se evalúan respecto al mismo punto, el momento angular total del

cuerpo rígido está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \\ &= \sum \mathbf{L}_i. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Primero se considera el caso de la figura 4.18, en el cual se tienen n partículas que forman una lámina rígida muy delgada, de espesor despreciable, con forma irregular y cuya distribución de masa también es irregular. La lámina gira con velocidad angular ω , en su propio plano, alrededor de un eje fijo perpendicular a ella y cuyo origen O también se encuentra en ese plano.

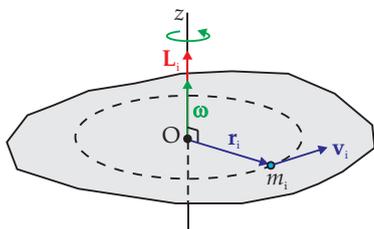


Figura 4.18: Momento angular de una lámina respecto al punto O .

De las partículas que conforman la lámina, se considera la partícula genérica i , que describe una trayectoria circular de radio $r_i = R_i$ con velocidad $\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i$. Como la velocidad angular es paralela al eje de rotación, esto es perpendicular a \mathbf{r}_i , la magnitud de la velocidad es

$$v_i = \omega r_i. \quad (4.19)$$

Ahora, como \mathbf{r}_i es perpendicular a \mathbf{v}_i , de acuerdo con la ecuación (4.17) la magnitud del momento angular, está dada por

$$L_i = m_i r_i v_i. \quad (4.20)$$

Reemplazando la ecuación (4.19) en la ecuación (4.20), se encuentra

$$L_i = m_i r_i^2 \omega, \quad (4.21)$$

que corresponde a una relación entre las magnitudes de los vectores \mathbf{L}_i y ω ; lo cual permite escribir la ecuación (4.21) en la forma vectorial,

$$\mathbf{L}_i = (m_i r_i^2) \omega. \quad (4.22)$$

El término entre paréntesis que aparece en la ecuación (4.22), se conoce como el *momento de inercia* de la partícula i , respecto al eje de rotación z que pasa por el punto O . Este concepto se analiza con más detalle en la siguiente sección.

Reemplazando la ecuación (4.22) en la ecuación (4.18), se encuentra que el momento angular del cuerpo rígido, respecto al punto O , está dado por

$$\mathbf{L} = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega, \quad (4.23)$$

donde se ha tenido en cuenta que la velocidad angular es la misma para todas las partículas que forman la lámina.

La ecuación (4.23) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{L} = I \omega, \quad (4.24)$$

donde se define

$$I \equiv \sum m_i r_i^2, \quad (4.25)$$

como el momento de inercia de la lámina respecto al eje z , que pasa por el punto O .

En síntesis, cuando la lámina está en rotación y el punto de referencia O coincide con el punto de intersección entre el eje de rotación y la lámina, el momento angular total es paralelo a la velocidad angular.

Ahora, se considera la misma lámina, pero el origen O ya no coincide con la intersección entre el eje z y el plano de rotación, como se ilustra en la figura 4.19.

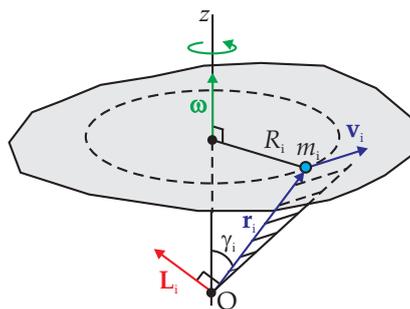


Figura 4.19: Momento angular de una lámina con O fuera de ella.

En esta situación, la ecuación (4.20) sigue siendo válida para la partícula i , pero la magnitud del vector posición \mathbf{r}_i ya no coincide con el radio de la trayectoria descrita por la partícula.

Como se ilustra en la figura 4.19, se presenta una diferencia respecto a la dirección del vector momento angular \mathbf{L}_i , ya que de acuerdo con su definición es un vector perpendicular al plano formado por \mathbf{r}_i y \mathbf{v}_i , esto es, el vector momento angular de la partícula i forma un ángulo de $90 - \gamma_i$ con el eje de rotación z , y gira continuamente con la partícula alrededor del eje.

Por lo anterior, si \mathbf{L}_i no es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$, el momento angular total de la lámina aun es dado por la ecuación (4.18), pero en general no es paralelo al vector velocidad angular.

En conclusión, cuando la lámina está rotando y el punto de referencia O no coincide con el punto de intersección entre el eje de rotación y la lámina, el momento angular total no es, en general, paralelo a la velocidad angular.

Cuando el momento angular no es paralelo a la velocidad angular, se considera la componente del momento angular paralela al eje z , es decir L_{iz} . En la figura 4.19, se tiene que esta componente está dada por

$$L_{iz} = L_i \cos(90 - \gamma_i). \quad (4.26)$$

Reemplazando la ecuación (4.20) en la ecuación (4.26), teniendo en cuenta que $v_i = r_i \omega \sin \gamma_i$ y $R_i = r_i \sin \gamma_i$, se encuentra

$$L_{iz} = (m_i R_i^2) \omega, \quad (4.27)$$

donde de nuevo aparece el término $m_i R_i^2$.

Igual que en el caso del vector momento angular total, la componente z del momento angular total de la lámina está dada por $L_z = \sum L_{iz}$, así que al reemplazar L_{iz} mediante la ecuación (4.27), se tiene la expresión escalar

$$L_z = I \omega, \quad (4.28)$$

con I dado por la ecuación (4.25).

De acuerdo con los resultados anteriores, en una placa que gira sobre su propio plano, siempre es posible tomar el origen O en ese plano y en consecuencia lograr una simplificación considerable, ya que el momento angular total es paralelo a la velocidad angular. En cambio, cuando se trata el caso más general de un cuerpo rígido tridimensional que está rotando, como el mostrado en la figura 4.20, ya no es posible hacer tal elección.

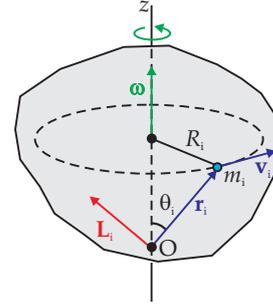


Figura 4.20: Momento angular de un cuerpo rígido tridimensional.

Igual que en el caso de la lámina, el cuerpo rígido rota alrededor del eje z con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, y todas las partículas describen trayectorias circulares. Mediante un procedimiento similar al llevado a cabo cuando el punto de referencia O se toma por fuera de la lámina, se encuentran resultados semejantes, así que en general, el momento angular total no es paralelo al vector velocidad angular, pues en general los \mathbf{L}_i no son paralelos al eje de rotación.

Por esta razón, es necesario considerar la componente del momento angular paralela al eje z , lo que lleva a relaciones idénticas a las dadas por las ecuaciones (4.27) y (4.28).

4.7. Momento de inercia de un cuerpo rígido

Se ha encontrado que para una lámina plana cuya distribución de masa es arbitraria, el momento angular total dado por la ecuación (4.24), es proporcional a la velocidad angular si la placa gira alrededor de un eje perpendicular al plano que contiene la placa y cuando el origen O se elige en la intersección del eje y el plano de rotación. La constante de proporcionalidad I , en la ecuación (4.24), se definió como el momento de inercia de la placa respecto al eje de rotación y está dado por la ecuación (4.25).

El momento de inercia de la placa no es único, ya que su valor depende del punto de la lámina por donde pase el eje de rotación que es perpendicular a ella. En general, como se indica en la figura 4.21, el valor de los términos r_i^2 varían al

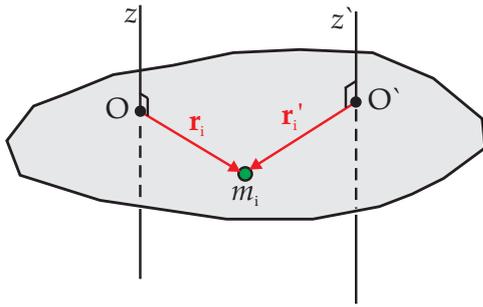


Figura 4.21: Momento de inercia respecto a dos ejes diferentes.

cambiar el eje de rotación y en consecuencia el valor del momento de inercia I será diferente.

La ecuación (4.25) muestra que el momento de inercia total de un cuerpo rígido, respecto al eje z , es igual a la suma de los momentos de inercia de las partículas que lo conforman, del mismo modo que su masa total es igual a la suma de las masas de todas las partículas del cuerpo. Esto permite afirmar que *el momento de inercia desempeña en rotación, el mismo papel que la masa en traslación*.

Aunque se ha restringido el concepto de momento de inercia para el caso de una placa delgada, este es aplicable a cualquier cuerpo rígido, ya que su valor depende de la distancia perpendicular de cada partícula al eje, sin importar la elección del punto O tomado como referencia.

En la ecuación (4.25), la suma se extiende a todas las partículas del cuerpo rígido tomadas como partículas discretas, esto es, como si se tratara de un gas de partículas. Ahora, puesto que un cuerpo rígido no se considera como un conjunto discreto de partículas sino como un medio continuo, la suma se convierte en una integral que se extiende sobre todo el volumen del cuerpo rígido.

Para obtener la expresión correspondiente del momento de inercia de un cuerpo rígido, tomando como un medio continuo, se considera la figura 4.22.

Se toma un elemento del cuerpo rígido con masa dm , volumen dV , y se supone que el cuerpo tiene una densidad de masa ρ . Teniendo en cuenta que la densidad se define como la masa por unidad de volumen, estas cantidades están

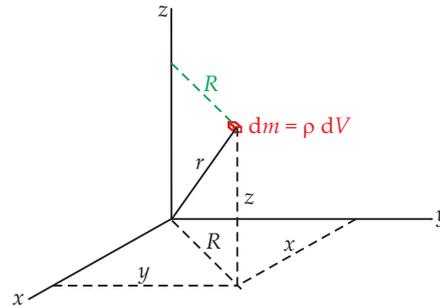


Figura 4.22: Momento de inercia de un cuerpo rígido.

relacionadas por

$$dm = \rho dV.$$

Ahora, si en la ecuación (4.25) se reemplaza la masa m por dm , la distancia r_i por R y la suma por una integral, esta se transforma en

$$I = \int \rho R^2 dV. \quad (4.29)$$

Por otro lado, si la masa del cuerpo está distribuida uniformemente, la densidad ρ puede salir de la integral y la ecuación (4.29) se convierte en

$$I = \rho \int R^2 dV, \quad (4.30)$$

lo que permite una simplificación, ya que el problema se reduce a resolver una integral que contiene sólo un factor geométrico, que es el mismo para todos los cuerpos de igual forma y tamaño.

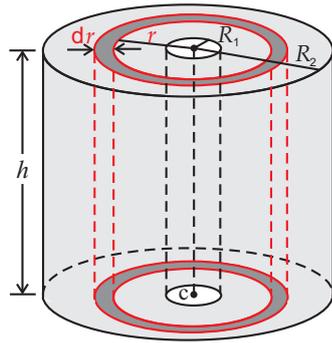
Dimensiones y unidades de momento de inercia

De acuerdo con la ecuación (4.25) ó (4.29), las dimensiones de momento de inercia son ML^2 , por lo tanto, la unidad en el sistema internacional de unidades está dada por $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ y en el sistema gaussiano de unidades por $\text{g} \cdot \text{cm}^2$.

Ejemplo 4.9.

Un cilindro homogéneo y hueco, de masa M , tiene radios interior y exterior dados respectivamente por R_1 y R_2 . Halle el momento de inercia del cilindro, respecto a su eje de simetría.

Solución



Como se muestra en la figura, el cascarón cilíndrico de radio r y espesor dr tiene un volumen infinitesimal dado por

$$dV = 2\pi r h dr. \quad (1)$$

Reemplazando la ecuación (1) en la ecuación (4.30), con $R = r$, se tiene

$$I_c = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr,$$

donde ρ es la densidad del material con el cual se ha construido el cilindro. Así luego de integrar y evaluar, se encuentra

$$I_c = \frac{1}{2}\pi\rho h(R_2^4 - R_1^4). \quad (2)$$

Además, como M es la masa del cilindro se cumple la relación

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)h}. \quad (3)$$

Llevando la ecuación (3) a la ecuación (2), y luego de simplificar, se obtiene para el momento de inercia del cilindro hueco, la expresión

$$I_c = M\frac{1}{2}(R_1^2 + R_2^2),$$

de este modo, el radio de giro del cilindro hueco está dado por la expresión

$$K_c^2 = \frac{1}{2}(R_1^2 + R_2^2)$$

4.8. Ejes principales de inercia

Para todo cuerpo, sin importar su forma, hay por lo menos tres direcciones perpendiculares entre sí, respecto a las cuales el momento angular es paralelo al eje de rotación y es válida la

ecuación (4.23). Estos ejes se llaman *ejes principales de inercia*, y cuando el cuerpo rígido presenta simetrías, estos ejes coinciden con algún eje de simetría.

4.8.1. Ejes principales de inercia en un cuerpo esférico

En un cuerpo esférico o con simetría esférica, cualquier eje que pase por su centro es un eje principal de inercia. En la figura 4.23, los ejes x_o, y_o, z_o son tres ejes principales de inercia.

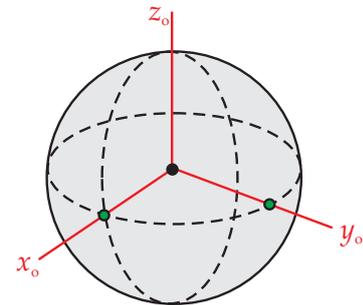


Figura 4.23: Ejes principales de inercia en un cuerpo esférico.

Así, en una esfera existen infinitos ejes principales de inercia.

4.8.2. Ejes principales de inercia en un cuerpo cilíndrico

Para un cuerpo cilíndrico o con simetría cilíndrica, el eje del cilindro y cualquier eje que sea perpendicular a él, es un eje principal de inercia. En la figura 4.24, los ejes x_o, y_o, z_o son tres ejes principales de inercia.

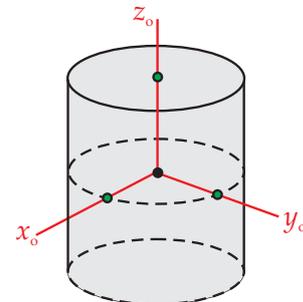


Figura 4.24: Ejes principales de inercia en un cuerpo cilíndrico.

4.8.3. Ejes principales de inercia en un cuerpo rectangular

Un bloque rectangular tiene tres ejes principales de inercia que son perpendiculares a las caras y pasan a través del centro del bloque. En la figura 4.25, los ejes x_o, y_o, z_o corresponden a los tres ejes principales de inercia de un cuerpo rígido con esta simetría.

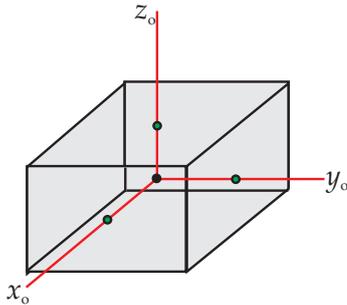


Figura 4.25: Ejes principales de inercia en un cuerpo rectangular.

En síntesis, se define un eje principal de inercia como aquel para el cual el momento angular es paralelo a la velocidad angular, que siempre se encuentra a lo largo del eje de rotación. Así, para un eje principal de inercia se cumple la ecuación (4.24), donde I es el momento de inercia respecto al eje principal de inercia correspondiente.

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje que no es principal, es válida la ecuación (4.28), donde I es de nuevo el momento de inercia respecto al eje que no es principal.

4.9. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

Generalmente se conoce el momento de inercia de un cuerpo rígido respecto a un eje que pasa por su centro de masa; pero en muchos casos, para analizar el movimiento de rotación de un cuerpo rígido, es necesario conocer el momento de inercia respecto a un eje paralelo que no pasa por el centro de masa. El *teorema de Steiner o de los ejes paralelos*, es una herramienta que permite llevar a cabo esta transformación.

Si en la figura 4.26 se conoce el momento de inercia I , respecto al eje z_c que pasa por el centro de masa del cuerpo rígido, el momento de inercia I respecto al eje z paralelo a z_c , el teorema de Steiner establece la relación

$$I = I_c + Ma^2,$$

donde M es la masa del cuerpo rígido y a es la separación entre los dos ejes paralelos.

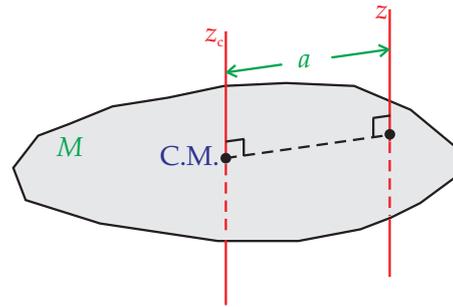


Figura 4.26: Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.

4.10. Radio de giro de un cuerpo rígido

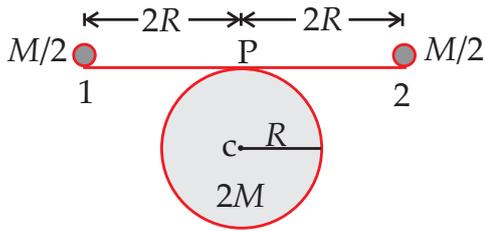
Es una cantidad física, definida de tal modo que se cumpla la relación

$$\begin{aligned} I &= MK^2, \\ K &= \sqrt{\frac{I}{M}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo rígido respecto a determinado eje y M su masa. Físicamente, el radio de giro representa la distancia medida desde el eje, a la cual se puede concentrar la masa del cuerpo sin variar su momento de inercia. El radio de giro se puede determinar completamente por geometría para cuerpos homogéneos. Es una cantidad que se puede evaluar fácilmente con ayuda de la ecuación (4.30). Conocido el radio de giro, mediante la ecuación (4.31), es posible determinar el momento de inercia respectivo. En la práctica, es posible conocer la forma del radio de giro mediante la tabla 4.1, donde se da K^2 , evaluado respecto a un eje específico en cuerpos con diferentes simetrías.

Ejemplo 4.10.

Como se muestra en la figura, una varilla delgada de masa M y longitud $4R$, se coloca sobre un cilindro de masa $2M$ y radio R . Además, en los extremos de la varilla se colocan dos masas muy pequeñas cada una de masa $M/2$. Halle el momento de inercia del sistema, respecto a un eje paralelo al eje del cilindro y que pasa por el punto de contacto entre el cilindro y la varilla.

**Solución**

El momento de inercia del sistema, I_{sp} , está dado por la suma de los momentos de inercia de cada cuerpo, todos evaluados respecto al eje que pasa por el punto P. Esto es

$$I_{sp} = I_{cp} + I_{vp} + I_{1p} + I_{2p}. \quad (1)$$

Por el teorema de Steiner, el momento de inercia del cilindro, respecto a un eje que pasa por el punto de contacto P es

$$I_{cp} = I_{cc} + 2MR^2 = 3MR^2, \quad (2)$$

donde $I_{cc} = \frac{1}{2}2MR^2$, es el momento de inercia del cilindro respecto a un eje que pasa por el centro de masa, de acuerdo con la tabla 4.1.

Como el punto de contacto P coincide con el centro de la varilla, de acuerdo con la información de la tabla 4.1, el momento de inercia de la varilla respecto al eje que pasa por P es

$$I_{vp} = \frac{4}{3}MR^2. \quad (3)$$

Además, como las pequeñas masas se encuentran en posiciones simétricas, respecto al punto P, sus momentos de inercia respecto al eje que pasa por P, son iguales, esto es

$$I_{1p} = I_{2p} = 2MR^2$$

Reemplazando las ecuaciones (2), (3) y (4) en (1) se encuentra que el momento de

inercia del sistema, respecto a un eje paralelo al eje del cilindro y que pasa por el punto P, está dado por

$$I_{sp} = \frac{25}{3}MR^2.$$

Ejercicio 4.9.

Para el sistema considerado en el ejemplo (4.10), encuentre el momento de inercia respecto a un eje coincidente con el eje del cilindro.

4.11. Ecuación de movimiento para la rotación de un cuerpo rígido

Aunque la expresión

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (4.32)$$

se obtuvo para el caso de una partícula con movimiento curvilíneo, también es válida en el caso de un sistema de partículas, si se interpreta \mathbf{L} como el momento angular total del sistema y $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ como el torque total debido a todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Es decir, si se cumplen simultáneamente las expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{L}_i, \\ \boldsymbol{\tau} &= \sum_i \boldsymbol{\tau}_i, \end{aligned}$$

donde ambas cantidades físicas se deben evaluar respecto al mismo punto.

Por consiguiente, la ecuación (4.32) adquiere la forma

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}, \quad (4.33)$$

con \mathbf{L} y $\boldsymbol{\tau}$, evaluados respecto al mismo punto.

Como el cuerpo rígido es un caso especial de un sistema de partículas, la ecuación (4.33) es aplicable en este caso y es la ecuación básica para analizar el movimiento de rotación de un cuerpo rígido, esto es, la ecuación (4.33) desempeña en rotación el mismo papel que la segunda ley de Newton en traslación. Por esta razón, se le conoce como la *ecuación de movimiento* para la rotación de un cuerpo rígido.

4.11.1. Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje principal de inercia

Se supone que el cuerpo rígido de la figura 4.27, tiene un movimiento de rotación alrededor del eje z considerado como eje principal de inercia; además, se toma el origen como un punto fijo en el eje que corresponde a un sistema de referencia no rotante o inercial.

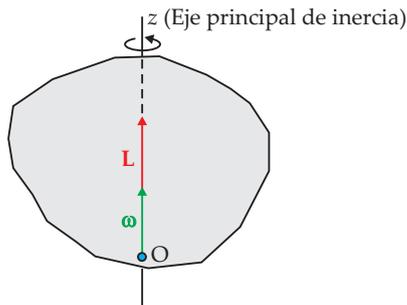


Figura 4.27: Rotación alrededor de un eje principal de inercia.

Como el eje de rotación z es un eje principal de inercia, se cumple la ecuación (4.24), y la ecuación (4.33) se transforma en

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = \tau, \quad (4.34)$$

donde τ es el torque total generado por las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rígido y el cual se evalúa respecto al punto fijo O , sobre el eje principal.

Ahora, si el eje está fijo en el cuerpo rígido, se tiene que el momento de inercia es constante y la ecuación (4.34) adquiere la forma

$$I\alpha = \tau, \quad (4.35)$$

donde se ha empleado la definición de aceleración angular. La ecuación (4.35), válida en rotación, es equivalente, en traslación a la segunda ley de Newton para masa constante.

Si el torque total de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rígido, es nulo, por la ecuación (4.34) se cumple la condición

$$I\omega = \text{Constante}, \quad (4.36)$$

que corresponde a la conservación del vector momento angular.

Un ejemplo de esta situación, se presenta cuando un patinador rota alrededor del eje de su cuerpo, donde las fuerzas que actúa sobre él son el peso y la normal que ejerce el piso, cuyas líneas de acción coincide con el eje de rotación. En este caso, el torque del peso y la normal respecto a un punto ubicado sobre el eje es nulo y el momento angular del patinador es constante respecto a dicho punto. Esto lleva a que aumente la velocidad angular del patinador cuando cierra los brazos, pues el momento de inercia disminuye. ¿Por qué?

En síntesis, cuando el torque neto es nulo, si el momento de inercia del cuerpo rígido aumenta (disminuye) la velocidad angular disminuye (aumenta) para garantizar que la ecuación (4.36) sea satisfecha.

Por otro lado, si adicionalmente el momento de inercia del cuerpo rígido permanece constante, la ecuación (4.36) indica que la velocidad angular también permanece constante. Así, un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje principal, fijo en el cuerpo, lo hace con velocidad angular constante cuando el torque total externo es cero. Este enunciado, en rotación, equivale a la primera ley de Newton en traslación.

4.11.2. Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje no principal de inercia

Cuando un cuerpo rígido rota alrededor de un eje que no es principal, como en la figura 4.28, es válida la ecuación (4.28) ya que el momento angular total no es paralelo a la velocidad angular, y la ecuación de movimiento correspondiente es

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z, \quad (4.37)$$

donde τ_z es la componente del torque total externo, paralela al eje de rotación z .

Si la orientación del eje es fija respecto al cuerpo, el momento de inercia es constante. Así, al reemplazar la ecuación (4.28) en la ecuación (4.37), se obtiene

$$I\alpha = \tau_z,$$

que es la ecuación de movimiento a utilizar cuando el momento de inercia es constante, y

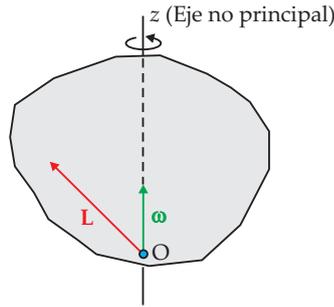


Figura 4.28: Rotación alrededor de un eje no principal.

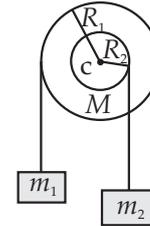
el cuerpo rígido rota alrededor de un eje que no es principal.

En los problemas de rotación de un cuerpo rígido se deben seguir los siguientes pasos

1. Se hace el diagrama de cuerpo libre, dibujando solamente las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rígido y ubicándolas en el punto donde actúan.
2. Se plantea la ecuación de movimiento para la rotación del cuerpo rígido, correspondiente a la situación particular que se esté considerando.
3. Se calculan los torques, respecto a un punto fijo del cuerpo por donde pase el eje de rotación.
4. Se obtiene el momento de inercia del cuerpo rígido respecto al eje de rotación. Cuando sea necesario, se emplea el teorema de Steiner o de los ejes paralelos.
5. Se resuelve la ecuación de movimiento, dependiendo de la información solicitada.

Ejemplo 4.11.

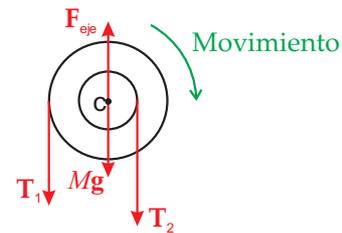
Un disco homogéneo de masa M y radio R_1 tiene un pequeño saliente de radio R_2 , como se indica en la figura. El disco rota alrededor de un eje que pasa por su centro, debido a la acción de los bloques de masas m_1 y m_2 . a) Para cada cuerpo, haga el diagrama de cuerpo libre y plantee las respectivas ecuaciones de movimiento. b) Determine la aceleración angular del disco y la aceleración de cada bloque. c) Analice los resultados obtenidos en el numeral b).



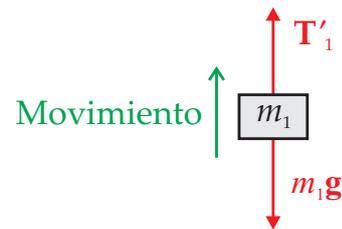
Solución

a) Diagramas de cuerpo libre donde $T_1 = T'_1$ y $T_2 = T'_2$.

Para el disco



Para m_1



Para m_2

Ecuaciones de movimiento, teniendo en cuenta el sentido de movimiento supuesto.

Para el disco, con movimiento de rotación pura alrededor de un eje que pasa por el centro C

$$\begin{aligned} \odot \sum \tau_c &= \alpha I_c, \\ -T_1 R_1 + T_2 R_2 &= \frac{1}{2} M R_1^2 \alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

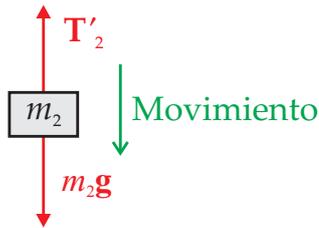
donde se ha tomado el sentido horario como positivo y de acuerdo con la tabla 4.1, $I_c = \frac{1}{2} M R_1^2$.

Para el bloque de masa m_1 con movimiento vertical de traslación pura

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y &= m_1 a_1, \\ T_1 - m_1 g &= m_1 a_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Para el bloque de masa m_2 con movimiento vertical de traslación pura

$$+ \downarrow \sum F_y = m_2 a_2,$$



$$m_2g - T_2 = m_2a_2. \quad (3)$$

b) Como la aceleración de m_2 es igual a la aceleración tangencial en el borde del pequeño saliente y la aceleración de m_1 es igual a la aceleración tangencial en el borde del disco se tiene

$$a_2 = \alpha R_2, \quad (4)$$

$$a_1 = \alpha R_1, \quad (5)$$

Reemplazando la ecuación (4) en la ecuación (3), y la (5) en la (2), es posible encontrar

$$\alpha = \frac{m_2R_2 - m_1R_1}{R_1^2(\frac{1}{2}M + m_1) + m_2R_2^2}g, \quad (6)$$

$$a_1 = \frac{R_1(m_2R_2 - m_1R_1)}{R_1^2(\frac{1}{2}M + m_1) + m_2R_2^2}g, \quad (7)$$

$$a_2 = \frac{R_2(m_2R_2 - m_1R_1)}{R_1^2(\frac{1}{2}M + m_1) + m_2R_2^2}g. \quad (8)$$

c) Las partículas que forman el disco, adquieren un movimiento circular uniforme, cuando la aceleración angular se hace cero, es decir, $\alpha = 0$. Por la ecuación (6), esta condición se satisface si el numerador se hace cero, lo que lleva a la relación

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (9)$$

En la ecuación (9) se observa que existe una relación inversa entre las masas de los bloques y los radios R_1 y R_2 . Ahora, de acuerdo con el enunciado $R_2 < R_1$, así $R_2/R_1 < 1$, o sea $m_1/m_2 < 1$ o lo que es igual, $m_1 < m_2$ si la velocidad angular del disco es constante. Igualmente se observa, al comparar las ecuaciones (7) y (8) con la ecuación (9), que si el disco rota con velocidad angular constante, los bloques se trasladan con velocidad constante.

En el caso particular que las masas de los bloques sean iguales, la aceleración angular no puede ser nula y el disco rotará en sentido antihorario. ¿Por qué?

El sentido de movimiento, con $\alpha \neq 0$, depende del signo del numerador, ya que el denominador siempre es positivo. Así, el disco rota en sentido horario cuando $\alpha > 0$, lo que lleva a la relación $m_2R_2 - m_1R_1 > 0$, o lo que es igual, $m_1/m_2 < R_2/R_1$. Por lo tanto, como $R_2/R_1 < 1$, entonces $m_1 < m_2$.

Pregunta

Para el caso de velocidad angular constante ¿la magnitud de la velocidad de los bloques es la misma? ¿Por qué?

Ejercicio 4.10.

Para el ejemplo 4.11, determine la tensión en cada una de las cuerdas.

Ejercicio 4.11.

Resuelva el ejemplo 4.11 suponiendo que los bloques están unidos mediante la misma cuerda y que esta pasa por el borde del disco de radio R_1 . Recuerde que el disco se comporta como una polea real.

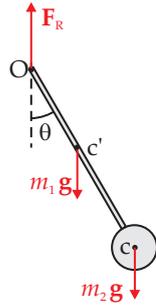
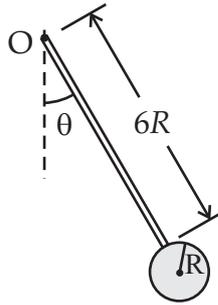
Ejemplo 4.12.

El cuerpo rígido de la figura, conocido como un péndulo físico, consta de una varilla delgada de masa m_1 y un disco de masa m_2 . Suponer que la varilla tiene una longitud $6R$ y el disco un radio R . Por otro lado, el péndulo rota alrededor de un eje que pasa por el extremo O, una vez que se suelta desde una posición angular $\theta_0 < 90^\circ$. a) Haga el diagrama de cuerpo libre para el péndulo físico y plantee la ecuación de movimiento. b) Determine, en función del ángulo θ , la aceleración angular del péndulo, la aceleración del centro de masa de la varilla y la aceleración del centro de masa del disco. c) Determine, en función de θ , la velocidad angular del péndulo físico.

Solución

a) Diagrama de cuerpo libre donde \mathbf{F}_R es la fuerza que el eje ejerce sobre la varilla en O, $m_1\mathbf{g}$ el peso de la varilla y $m_2\mathbf{g}$ el peso del disco.

La ecuación de movimiento para rotación pura alrededor del eje que pasa por



O, es de la forma

$$\sum_i \tau_{iO} = \alpha I_O. \quad (1)$$

Ahora, de acuerdo con la figura anterior y tomando el sentido horario como positivo, el torque de las fuerzas externas está dado por

$$\sum \tau_{iO} = (3m_1 + 7m_2)Rg \sin\theta. \quad (2)$$

Por otro lado, como el momento de inercia del péndulo físico es igual al momento de inercia de la varilla más el momento de inercia del disco, evaluados respecto al punto O, se tiene

$$I_O = I_{\circ O} + I_{dO},$$

donde al emplear el teorema de Steiner y la información dada en la tabla 4.1, se llega a

$$I_O = \frac{3}{2}(8m_1 + 33m_2)R^2. \quad (3)$$

Reemplazando las ecuaciones (2) y (3) en (1), se encuentra que la ecuación de movimiento adquiere la forma

$$(3m_1 + 7m_2)g \sin\theta = \frac{3}{2}\alpha(8m_1 + 33m_2)R. \quad (4)$$

b) De acuerdo con la ecuación (4), la aceleración angular del péndulo físico está dada por

$$\alpha = \frac{2(3m_1 + 7m_2)g}{3R(8m_1 + 33m_2)} \sin\theta. \quad (5)$$

Así, la aceleración del centro de masa de la varilla, con $a_{c'} = 3\alpha R$, es

$$a_{c'} = \frac{2(3m_1 + 7m_2)g}{(8m_1 + 33m_2)} \sin\theta.$$

Finalmente, para la aceleración del centro de masa del disco, con $a_c = 7\alpha R$, se obtiene

$$a_c = \frac{14(3m_1 + 7m_2)g}{3(8m_1 + 33m_2)} \sin\theta.$$

De los resultados obtenidos se observa que estas cantidades se hacen cero, únicamente, cuando el ángulo θ es igual a cero, esto es, cuando la varilla se encuentra instantáneamente en posición vertical. Así, cuando la varilla se aleja de esta posición, las magnitudes de estas cantidades aumentan y cuando se acerca a ella disminuyen.

c) De acuerdo con la definición de aceleración angular, la ecuación (5) se puede escribir en la forma

$$\frac{d\omega}{dt} = C \sin\theta, \quad (6)$$

donde la constante C definida por

$$C \equiv \frac{2(3m_1 + 7m_2)g}{3(8m_1 + 33m_2)R},$$

tiene unidades de s^{-2} .

Si en la ecuación (6) se multiplica a ambos lados por $d\theta$, se obtiene

$$\int_0^\omega \omega d\omega = -C \int_{\theta_0}^\theta \sin\theta d\theta,$$

donde el signo menos se debe tener en cuenta, ya que cuando el péndulo se suelta desde la posición inicial, el ángulo θ disminuye con el tiempo.

Luego de integrar y evaluar la expresión anterior, se encuentra que la rapidez angular está dada por

$$\omega = \sqrt{2C(\cos\theta - \cos\theta_0)}. \quad (8)$$

De acuerdo con la ecuación (8), el máximo valor de la velocidad angular se presenta en el instante que el péndulo está en posición vertical. Así, cuando θ disminuye la velocidad angular aumenta y cuando θ aumenta la velocidad angular disminuye.

Pregunta

En la ecuación (8) ¿Qué condición se debe cumplir entre el ángulo y el ángulo? ¿Por qué?

Ejercicio 4.12.

Resuelva el ejemplo 4.12, suponiendo que el péndulo físico está constituido sólo por una varilla delgada de longitud $8R$. Compare los resultados.

4.11.3. Movimiento combinado de traslación y rotación de un cuerpo rígido

Cuando el movimiento de un cuerpo rígido, es tal que su centro de masa tiene una traslación respecto a un sistema de referencia inercial y una rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa, es necesario analizar los dos movimientos por separado, esto es, considerar un sistema fuerza-par equivalente. Esta situación se muestra en la figura 4.29.

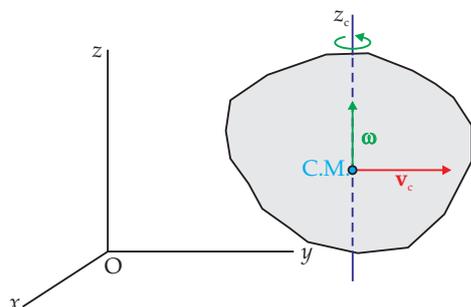


Figura 4.29: Eje de rotación variando de posición.

Si el eje de rotación no tiene un punto fijo en un sistema de referencia inercial, como ocurre cuando un cuerpo rueda por un plano inclinado, para analizar el movimiento de traslación se emplea la segunda ley de Newton en la forma

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_c,$$

donde \mathbf{F} es la fuerza neta externa que actúa sobre el cuerpo rígido, m su masa que es constante y a_c la aceleración del centro masa.

Para el movimiento de rotación, se debe calcular el momento angular del cuerpo rígido y el torque neto sobre el cuerpo rígido, respecto

al centro de masa del cuerpo. O sea, la ecuación de movimiento respectiva es

$$\frac{d\mathbf{L}_c}{dt} = \boldsymbol{\tau}_c. \quad (4.38)$$

Si a la vez, como ocurre generalmente, la rotación es alrededor de un eje principal que pasa por el centro de masa, se tiene

$$I_c\boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}_c \quad (4.39)$$

Ahora, si el momento de inercia es constante, eje fijo en el cuerpo, entonces mediante las ecuaciones (4.38) y (4.39), se encuentra que la ecuación de movimiento correspondiente es

$$I_c\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\tau}_c,$$

donde se ha empleado la definición de aceleración angular.

Si el torque total respecto al centro de masa es cero, la velocidad angular es constante y el momento angular se conserva. Esta situación ocurre cuando la única fuerza externa aplicada a un cuerpo rígido homogéneo es su peso.

Debido a la complejidad que se presenta, cuando se analiza este tipo de movimiento en tres dimensiones, se restringe el movimiento a dos dimensiones y con cuerpos homogéneos que presentan alto grado de simetría, tales como esferas, cilindros o aros.

Cuando un cuerpo rígido tiene movimiento combinado de traslación y rotación sobre una superficie, se dice que el cuerpo rueda, y en este caso se debe tener presente si rueda deslizando o sin deslizar.

- Si un cuerpo rígido homogéneo, rueda y desliza, la fuerza de fricción es cinética, esto es, se cumple la relación $F_k = \mu_k N$.
- Si el cuerpo rígido homogéneo, rueda sin deslizar, la fuerza de fricción es estática y la relación válida es $F_s \leq \mu_s N$.

Otra forma de entender lo anterior, es considerando la velocidad del punto de contacto del cuerpo rígido con la superficie sobre la cual rueda. Si el cuerpo rueda y desliza, la velocidad

del punto de contacto, con respecto a la superficie, es diferente de cero; pero si el cuerpo rueda y no desliza, la velocidad del punto de contacto, con respecto a la superficie, es igual a cero.

Además, el cuerpo rígido debe ser homogéneo, para garantizar que su centro geométrico coincida con su centro de masa.

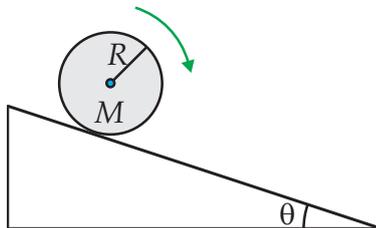
Se debe tener presente que las expresiones, $v_c = \omega R$ y $a_c = \alpha R$, sólo tienen validez si el cuerpo rígido con alto grado de simetría, es homogéneo y rueda sin deslizar.

Cuando en un caso particular, no se sabe si el cuerpo rígido rueda deslizando ó sin deslizar, primero se debe suponer que no hay deslizamiento. En el caso que la fuerza de fricción calculada, sea menor o igual a $\mu_s N$, la suposición es correcta; pero si la fuerza de fricción obtenida, es mayor que $\mu_s N$, la suposición es incorrecta y el cuerpo rueda deslizando.

En problemas donde se presente movimiento combinado de traslación y rotación, además de los pasos que se siguen para la rotación pura de un cuerpo rígido, alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, se debe incluir la ecuación de movimiento correspondiente a la traslación del centro de masa.

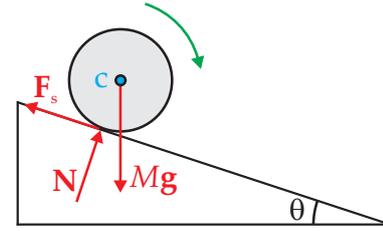
Ejemplo 4.13.

Un cascarón esférico homogéneo, de radio R y masa M , rueda sin deslizar por la superficie de un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Determine la aceleración de la esfera, su aceleración angular y la fuerza de fricción entre la esfera y la superficie del plano inclinado.



Solución

Diagrama de cuerpo libre para el cascarón esférico, donde Mg es el peso del cascarón, N la fuerza que la superficie ejerce sobre el cascarón y F_s la fuerza de fricción estática entre el cascarón y la superficie.



Ecuaciones de movimiento para el cascarón esférico.

Para el movimiento de traslación del centro de masa del cascarón

$$\searrow + \sum_i F_x = Ma_c$$

$$Mg \sin \theta - F_s = Ma_c. \quad (1)$$

$$\uparrow + \sum_i F_y = 0,$$

$$N - Mg \cos \theta = 0. \quad (2)$$

Para el movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa del cascarón

$$\odot + \sum_i \tau_c = I_c \alpha,$$

donde al tomar el sentido de rotación como positivo y utilizando la información de la tabla 4.1, se tiene

$$F_s R = \frac{2}{3} MR^2 \alpha. \quad (3)$$

De la ecuación (3), se tiene que la fuerza de fricción es la responsable de la rotación del cascarón alrededor del eje que pasa por el centro de masa. Ahora, eliminando la fuerza de fricción F_s , mediante las ecuaciones (1) y (3), se encuentra que la aceleración del cascarón, está dada por

$$a_c = \frac{3}{5} g \sin \theta, \quad (4)$$

donde se ha empleado la expresión

$$a_c = \alpha R, \quad (5)$$

ya que el cascarón es homogéneo y rueda sin deslizar.

Ahora, igualando las ecuaciones (4) y (5), para la aceleración angular del cascarón se obtiene

$$\alpha = \frac{3}{5} \frac{g \sin \theta}{R}. \quad (6)$$

Por las ecuaciones (3) y (6), la fuerza de fricción está dada por

$$F_s = \frac{2}{5}Mg\sin\theta. \quad (7)$$

De acuerdo con los resultados obtenidos, se puede concluir

1. Por la ecuación (4), la aceleración del cascarón sólo depende del ángulo de inclinación θ y su magnitud es menor que la aceleración de la gravedad, como era de esperarse.
2. Para la aceleración angular del cascarón, de acuerdo con la ecuación (6), se tiene que su magnitud depende, tanto del ángulo de inclinación θ , como del tamaño del cascarón al depender de R .
3. En lo referente a la fuerza de fricción estática, la ecuación (7) muestra que su magnitud depende de la masa del cascarón M y del ángulo de inclinación θ .

Ejercicio 4.13.

Resuelva el ejemplo 4.13, si el cascarón esférico se reemplaza por a) Una esfera maciza. b) Un disco o cilindro. c) Un aro. Suponga, en cada caso, que la masa del cuerpo es M y el radio es R . Compare los resultados, con los obtenidos en el ejemplo 4.13.

4.12. Energía de un cuerpo rígido

En la unidad 3 se consideraron los tipos de energía mecánica que se le puede asociar a una partícula, de acuerdo a su estado dinámico. En esta sección se consideran igualmente los tipos de energía mecánica que se le pueden asociar a un cuerpo rígido teniendo en cuenta su estado dinámico.

4.12.1. Energía cinética de un cuerpo rígido

En la unidad de trabajo y energía, se encontró que a una partícula de masa m_i , con velocidad \mathbf{v}_i respecto a un sistema de referencia inercial

determinado, se le asocia una energía cinética dada por

$$E_{k,i} = \frac{1}{2}m_iv_i^2.$$

Para un cuerpo rígido, que es un caso particular de un sistema de partículas, la energía cinética total está dada por la suma de las energías cinéticas de todas las partículas que lo conforman, esto es

$$E_k = \sum_i \left(\frac{1}{2}m_iv_i^2 \right), \quad (4.40)$$

donde el término entre paréntesis corresponde a la energía cinética de la partícula i , que tiene masa m_i y velocidad con magnitud \mathbf{v}_i . De acuerdo a la forma como se ha planteado la ecuación (4.40), se tiene que la energía cinética es una cantidad asociada a cualquier partícula que se encuentre en movimiento, independientemente del tipo de movimiento o de la trayectoria descrita.

A diferencia del caso de una partícula, en un cuerpo rígido es necesario distinguir entre energía cinética traslacional y energía cinética rotacional, ya que generalmente las fuerzas externas tienden a imprimir movimiento de traslación del centro de masa y movimiento de rotación del cuerpo alrededor de un eje determinado.

4.12.2. Energía cinética traslacional de un cuerpo rígido

Cuando las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido, sólo tienen efectos de *traslación pura*, la energía cinética de traslación del cuerpo rígido está dada por la energía cinética del centro de masa, ya que en lo referente a traslación, el cuerpo rígido se comporta como si todas las fuerzas actuaran sobre él y como si su masa M se encontrara concentrada en dicho punto. Por ello, la energía cinética de esta partícula es

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_c^2, \quad (4.41)$$

siendo v_c la magnitud de la velocidad del centro de masa.

Esta situación física se muestra en la figura 4.30, en el caso de movimiento paralelamente al eje x .

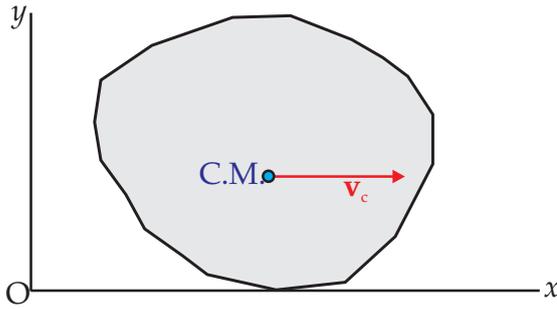


Figura 4.30: Cuerpo rígido en traslación pura.

4.12.3. Energía cinética rotacional de un cuerpo rígido

En la figura 4.31, se tiene un cuerpo rígido con movimiento de *rotación pura*, alrededor del eje z , y con velocidad angular ω .

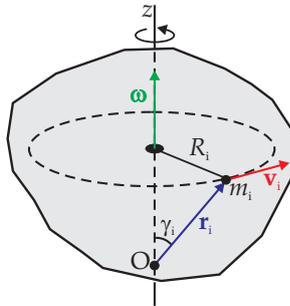


Figura 4.31: Cuerpo rígido en rotación pura.

La partícula i de masa m_i , al describir la trayectoria circular con centro en el eje de rotación, tiene una rapidez que está relacionada con la rapidez angular por $v_i = \omega R_i$, donde R_i es el radio de la circunferencia que describe la partícula. Así, por la ecuación (4.40), se tiene que la energía cinética total del cuerpo rígido, debido al movimiento de rotación pura, adquiere la forma

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2, \quad (4.42)$$

donde el término entre paréntesis corresponde al momento de inercia del cuerpo rígido respecto al eje de rotación, definido mediante la ecuación (4.25), con $r_i = R_i$. Por consiguiente, la ecuación (4.42) se transforma en

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (4.43)$$

La ecuación (4.43), permite determinar la energía cinética total de rotación de un cuerpo rígido, y es de validez general ya que se cumple respecto a cualquier eje de rotación. Además, de nuevo se observa que el momento de inercia desempeña en rotación, el mismo papel que la masa en traslación.

Cuando el cuerpo rígido rota alrededor de un eje principal de inercia, se satisface la ecuación (4.24) y la ecuación (4.43) se convierte en

$$E_k = \frac{L^2}{2I},$$

que sólo es válida si el cuerpo rígido rota alrededor de un eje principal de inercia.

4.12.4. Energía cinética total de un cuerpo rígido

Cuando un cuerpo rígido posee un movimiento combinado de traslación y rotación, se debe considerar separadamente la energía cinética traslacional y la energía cinética rotacional. Ahora, si el eje de rotación pasa por el centro de masa y al mismo tiempo el centro de masa tiene un movimiento de traslación respecto a un sistema de referencia inercial, como en la figura 4.32, la energía cinética total del cuerpo rígido, utilizando las ecuaciones (4.41) y (4.43), está dada por

$$E_k = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \quad (4.44)$$

donde el primer término a la derecha de la igualdad, es la energía cinética de traslación del centro de masa y el segundo término, la energía cinética de rotación respecto a un eje que pasa por el centro de masa. La cantidad I_c , en la ecuación (4.44), es el momento de inercia del cuerpo rígido respecto al eje que pasa a través del centro de masa.

Lo anterior tiene sentido, ya que en un cuerpo rígido el centro de masa está fijo en el cuerpo y el único movimiento que el cuerpo puede tener respecto a un eje que pase por su centro de masa es de rotación.

Ejemplo 4.14.

Un disco homogéneo de masa M y radio

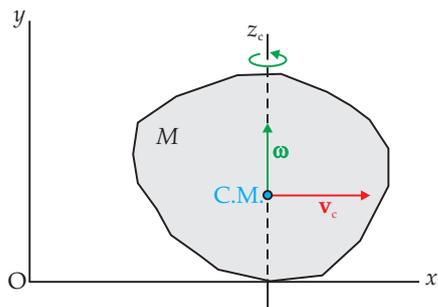
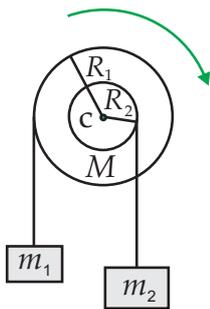


Figura 4.32: *Cuerpo rígido con movimiento combinado de traslación y rotación.*

R_1 tiene un pequeño saliente de radio R_2 , como se indica en la figura. El disco parte del reposo y rota alrededor de un eje que pasa por su centro, debido a la acción de los bloques de masas m_1 y m_2 . determine la energía cinética total del sistema en función del tiempo.



Solución

De acuerdo con la situación planteada, el disco tiene un movimiento de *rotación pura* y los bloques movimiento de *traslación pura*. Por esta razón, para determinar la energía cinética total del sistema, es necesario incluir, además de la energía cinética de rotación del disco, la energía cinética de traslación de cada bloque, esto es

$$E_k = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2, \quad (1)$$

donde los tres términos a la derecha de la ecuación (1) son, respectivamente, la energía cinética de rotación del disco, la energía cinética de traslación de m_1 y la energía cinética de traslación de m_2 .

Por otro lado, la rapidez de cada bloque está relacionada con la rapidez angular del disco por

$$v_1 = \omega R_1 \quad \text{y} \quad v_2 = \omega R_2. \quad (2)$$

Reemplazando las ecuaciones (2) en la ecuación (1), se obtiene para la energía cinética total del sistema, en función de la velocidad angular del disco, la expresión

$$E_k = \frac{1}{2}[(\frac{1}{2}M + m_1)R_1^2 + m_2R_2^2]\omega^2. \quad (3)$$

Los resultados del ejemplo 4.11 muestran que el disco rota con aceleración angular constante, esto es, su velocidad angular varía con el tiempo, igual que la energía cinética del sistema, de acuerdo con la ecuación (3).

Utilizando tanto la expresión obtenida para la aceleración angular en el ejemplo 4.11 como la definición de aceleración angular, y teniendo en cuenta que el sistema parte del reposo, se encuentra que la velocidad angular depende del tiempo en la forma

$$\omega = \frac{(m_2R_2 - m_1R_1)g}{R_1^2(\frac{1}{2}M + m_1) + m_2R_2^2}t. \quad (4)$$

De este modo, por las ecuaciones (3) y (4), la energía cinética del sistema, en función del tiempo, está dada por

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{(m_2R_2 - m_1R_1)^2g^2}{R_1^2(\frac{1}{2}M + m_1) + m_2R_2^2}t^2. \quad (5)$$

La ecuación (5), además de mostrar que la energía cinética del sistema es positiva, indica que esta aumenta con el tiempo mientras exista movimiento.

Ejercicio 4.14.

Sabiendo que el sistema del ejercicio 4.11 parte del reposo, determine su energía cinética total función del tiempo. Compare los resultados con los obtenidos en el ejemplo 4.14.

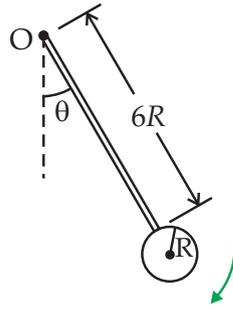
Ejemplo 4.15.

Determine, en función del ángulo θ , la energía cinética del péndulo físico considerado en ejemplo 4.12.

Solución

En este caso, el péndulo físico tiene un movimiento de rotación pura alrededor de un eje que pasa por el extremo O, esto es, sólo posee energía cinética de rotación que está dada por

$$E_k = \frac{1}{2}I_O\omega^2. \quad (1)$$



Ahora, de acuerdo con el ejemplo 4.12, se tiene

$$I_O = \frac{3}{2}(8m_1 + 33m_2)R^2, \quad (2)$$

$$\omega = \sqrt{2C(\cos\theta - \cos\theta_0)}, \quad (3)$$

con

$$C \equiv \frac{2(3m_1 + 7m_2)g}{3(8m_1 + 33m_2)R}. \quad (4)$$

Luego de reemplazar las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1), se encuentra que la energía cinética de rotación del péndulo físico es

$$E_k = gR(3m_1 + 7m_2)(\cos\theta - \cos\theta_0). \quad (5)$$

Por la ecuación (5) se tiene que la energía cinética de rotación se hace instantáneamente cero, cuando el péndulo físico llega a los extremos de la trayectoria, esto es, donde $\theta = \theta_0$. Por otro lado, adquiere su máximo valor en el instante que el péndulo está en posición vertical, o sea, cuando $\theta = 0$.

Ejercicio 4.15.

Obtenga, en función del ángulo θ , la energía cinética del péndulo físico del ejercicio 4.12. Compare su resultado con el obtenido en el ejemplo 4.15.

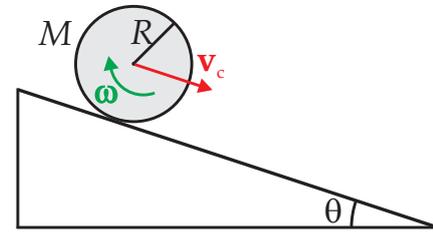
Ejemplo 4.16.

Para el cascarón del ejemplo 4.13, determine qué fracción de la energía cinética total es traslacional y qué fracción es rotacional, una vez que se inicia el movimiento.

Solución

Como el cascarón tiene un movimiento de rodadura, el centro de masa tiene un movimiento de traslación y simultáneamente rota alrededor de un eje que pasa

por el centro de masa. Así, en un instante determinado, la energía cinética total del cascarón está dada por



$$E_k = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2. \quad (1)$$

Ahora, como el cascarón rueda sin deslizar, la velocidad del centro de masa está relacionada con la velocidad angular por

$$v = \omega R. \quad (2)$$

Reemplazando la ecuación (2) en la ecuación (1), con

$$I_c = \frac{2}{3}MR^2,$$

se obtiene

$$E_k = \frac{5}{6}MR^2\omega^2. \quad (3)$$

Mediante las ecuaciones (1), (2) y (3), la fracción de la energía cinética total que es energía cinética traslacional, está dada por

$$\frac{E_{kT}}{E_k} = 0.6,$$

y la fracción que es energía cinética rotacional es

$$\frac{E_{kR}}{E_k} = 0.4.$$

De acuerdo con estos resultados, el de la energía cinética total es traslacional y el rotacional, independientemente del el tamaño, la masa y la velocidad angular del cascarón.

Ejercicio 4.16.

Resuelva el ejemplo 4.16, si el cascarón esférico se reemplaza por a) Una esfera maciza. b) Un disco o cilindro. c) Un aro. Suponga, en cada caso, que la masa es M y el radio es R . Compare los resultados, con los obtenidos en el ejemplo 4.16.

4.12.5. Energía total de un cuerpo rígido

Teniendo en cuenta la definición de cuerpo rígido, la distancia entre cualquier pareja de partículas no cambia durante el movimiento. Por ello, se puede suponer que la energía potencial propia o interna permanece constante, lo que permite no considerarla cuando se analiza el intercambio de energía del cuerpo con sus alrededores.

En concordancia con el teorema del trabajo y la energía, que es válido para el caso de un cuerpo rígido, se tiene

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \Delta E_k \\ &= E_k - E_{k0}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde W_{ext} es el trabajo realizado por todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rígido.

Ahora, si sobre el cuerpo rígido actúan simultáneamente fuerzas externas conservativas y no conservativas, el trabajo total se puede expresar como

$$W_{\text{ext}} = W_c + W_{\text{nc}}, \quad (4.46)$$

siendo W_c el trabajo realizado por las fuerzas externas conservativas y W_{nc} el trabajo de las fuerzas externas no conservativas. Teniendo en cuenta que $W_c = -\Delta E_p$ y con ayuda de la ecuación (4.45), es posible demostrar que la ecuación (4.46) se convierte en

$$\begin{aligned} W_{\text{nc}} &= (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0}) \\ &= \Delta E, \end{aligned} \quad (4.47)$$

con E correspondiendo a la energía total del cuerpo rígido y E_p a la energía potencial asociada con las fuerzas externas conservativas. La ecuación (4.47), igual que en el caso de una partícula, muestra que la energía total de un cuerpo rígido no se conserva cuando sobre él actúan simultáneamente fuerzas externas conservativas y no conservativas, esto es, el sistema es no conservativo. La ecuación (4.47) se emplea, por ejemplo, cuando sobre un cuerpo rígido actúan simultáneamente la fuerza gravitacional y la fuerza de fricción dinámica.

En el caso particular que sobre el cuerpo sólo actúen fuerzas externas conservativas, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es nulo, y la ecuación (4.47) se transforma en

$$\begin{aligned} (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0}) &= \Delta E \\ &= 0 \end{aligned}$$

que expresa la conservación de la energía. Así, cuando sobre el cuerpo únicamente actúan fuerzas externas conservativas, la energía total mecánica permanece constante, es decir, el sistema es conservativo.

De los resultados anteriores se puede afirmar que son idénticos a los obtenidos para el caso de una partícula; la diferencia radica en el hecho que para un cuerpo rígido sólo se deben tener en cuenta las fuerzas externas, ya que también se presentan fuerzas internas en este tipo de sistema.

Matemáticamente, la conservación de la energía total se expresa en la forma

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p \\ &= \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 + E_p \\ &= \text{Constante.} \end{aligned}$$

En el caso particular de un cuerpo rígido que cae por acción de la gravedad y a la vez rota alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, como se ilustra en la figura 4.33, la ley de conservación de la energía adquiere la forma

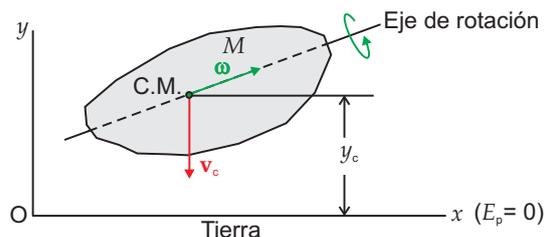


Figura 4.33: Cuerpo rígido que descende rotando.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 + m g y_c \\ &= \text{Constante,} \end{aligned}$$

donde y_c es la altura del centro de masa, respecto al nivel cero de energía potencial gravitacional.

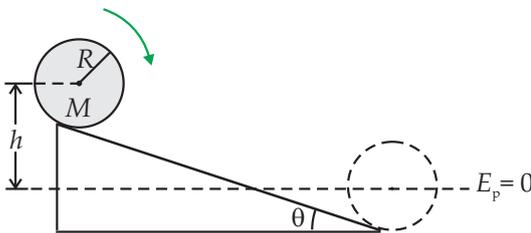
Es importante notar en este punto que cuando un cuerpo rígido rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal rugosa, actúa la fuerza de fricción estática F_s . Esta fuerza de fricción no realiza trabajo, ya que la velocidad del punto de contacto v_P , respecto a la superficie, es cero. Es decir, para un desplazamiento infinitesimal

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r} \frac{dt}{dt} \\ &= \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{v}_P dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si sobre un sistema actúan simultáneamente fuerzas conservativas y la fuerza de fricción estática, el sistema es conservativo.

Ejemplo 4.17.

El cascarón esférico del ejemplo 4.13, parte del reposo desde una altura h como se muestra en la figura. Determine la velocidad angular y la velocidad del cascarón, cuando éste llega a la base del plano inclinado.



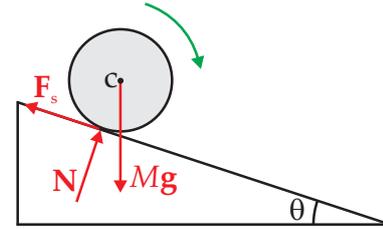
Solución

Diagrama de cuerpo libre para el cascarón.

De acuerdo con el diagrama espacial, sobre el cascarón actúan las siguientes fuerzas

- La normal N , que por ser perpendicular al desplazamiento del centro de masa, no realiza trabajo.
- El peso mg , que realiza trabajo y es una fuerza conservativa.
- La fuerza de fricción estática F_s , que no realiza trabajo ya que el cascarón rueda sin deslizar.

De este modo, el sistema es conservativo porque la única fuerza que realiza trabajo es conservativa. En otras palabras, la



energía mecánica total del cascarón permanece constante. Así,

$$\Delta E = 0 \quad E_f = E_i, \quad (1)$$

donde E_i es la energía total en la situación inicial y E_f en la situación final.

Ahora, de acuerdo con el nivel cero de energía potencial elegido, la ecuación (1) adquiere la forma

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2. \quad (2)$$

Como el momento de inercia del cascarón, respecto a un eje que pasa por el centro de masa, está dado por

$$I_c = \frac{2}{3}MR^2,$$

la ecuación (2) se transforma en

$$6gh = 3v_c^2 + 2R^2\omega^2. \quad (3)$$

Además, como el cascarón es homogéneo y rueda sin deslizar, es válida la expresión

$$v_c = \omega R. \quad (4)$$

Así, mediante las ecuaciones (3) y (4) se encuentra que la velocidad angular del cascarón, cuando llega a la base del plano inclinado, está dada por

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{6}{5}gh},$$

y la velocidad del cascarón por

$$v_c = \sqrt{\frac{6}{5}gh}.$$

Ejercicio 4.17.

Partiendo de la expresión para la aceleración angular, encontrada en el ejemplo 4.13, determine la velocidad angular cuando el cascarón llega a la base del plano inclinado, sabiendo que partió desde una altura h . Compare su resultado, con el obtenido en el ejemplo 4.17.

Ejercicio 4.18.

Resuelva el ejemplo 4.17, si el cascarón esférico se reemplaza por a) Una esfera maciza. b) Un disco o cilindro. c) Un aro. En cada caso, suponga que la masa es M y radio es R . De acuerdo con sus resultados y el obtenido en el ejemplo 4.17 ¿en qué orden llegarán los cuerpos a la base del plano inclinado, si se les suelta simultáneamente desde la misma posición?

4.13. Movimiento por rodadura de un cuerpo rígido

Bajo el modelo de partícula tratado en las tres primeras unidades, se han considerado cuerpos que *deslizan* sobre superficies reales o ásperas, es decir, sobre las superficies en contacto actúa la fuerza de fricción cinética o dinámica ya que la velocidad relativa de una superficie respecto a la otra, es diferente de cero. En esta sección, se analiza el movimiento combinado de traslación y rotación de cuerpos rígidos sobre superficies reales, tal como ocurre cuando una esfera o cilindro tiene ambos movimientos al descender sobre un plano inclinado.

Además, se sabe que cuando los cuerpos rígidos ruedan sin deslizar, situación conocida como *movimiento por rodadura*, se debe tratar como una combinación de un movimiento de traslación y uno de rotación. Lo importante de este caso particular, se encuentra en el hecho que es posible tratar a un cuerpo rígido que rueda sin deslizar, como si su movimiento fuera exclusivamente de rotación. A continuación se ilustra la equivalencia de los dos métodos, o sea, partiendo de un movimiento combinado de traslación y rotación se debe llegar a un movimiento de rotación instantáneo puro, y viceversa.

En lo que sigue, como se muestra en la figura 4.34, se considera un cuerpo rígido homogéneo, con alto grado de simetría y que rueda sin deslizar en un plano bidimensional.

Por otro lado, se supone que es un cuerpo rígido de radio R y masa M , que rueda sobre una superficie horizontal áspera. Como el cuer-

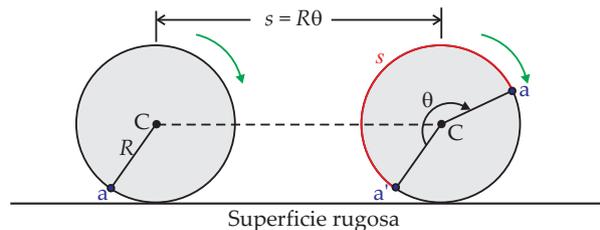


Figura 4.34: *Movimiento por rodadura de un cuerpo rígido.*

po rígido rueda sin deslizar, cuando el radio barre un ángulo θ , el centro de masa C se desplaza horizontalmente una distancia $s = R\theta$, como lo muestra la figura 4.34. Por lo tanto, la magnitud de la velocidad del centro de masa, para el movimiento puro por rodadura, está dada por

$$\begin{aligned} v_c &= \frac{ds}{dt} \\ &= R \frac{d\theta}{dt} \\ &= R\omega, \end{aligned} \quad (4.48)$$

y la magnitud de la aceleración del centro de masa, por

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{dv_c}{dt} \\ &= R \frac{d\omega}{dt} \\ &= R\alpha. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Las ecuaciones (4.48) y (4.49) muestran que el cuerpo rígido se comporta como si rotara instantáneamente alrededor de un eje que pasa por el punto de contacto del cuerpo con la superficie sobre la cual rueda sin deslizar. Se habla de rotación instantánea ya que el punto de contacto cambia continuamente mientras el cuerpo rueda. En otras palabras, se consideró inicialmente un movimiento combinado de traslación y rotación, y se ha llegado a un movimiento de rotación instantánea pura.

Para ilustrar un poco más el resultado anterior, en la figura 4.35 se muestran las velocidades lineales de diversos puntos del cilindro que rueda. Como consecuencia del movimiento de rotación instantánea pura, la velocidad lineal de cualquiera de los puntos señalados, se

encuentra en una dirección perpendicular a la recta que va de ese punto al punto de contacto con la superficie. En cualquier instante, el punto de contacto P está en reposo instantáneo respecto a la superficie, ya que no se presenta deslizamiento entre las superficies. Por esta razón, el eje que pasa por el punto de contacto P, que es perpendicular a la hoja, se le conoce como *eje instantáneo de rotación*.

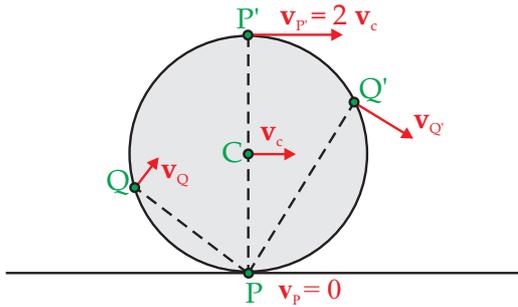


Figura 4.35: Rotación alrededor de un eje instantáneo que pasa por P.

Partículas del cuerpo rígido, tales como Q y Q', tienen componentes horizontal y vertical de la velocidad; sin embargo, los puntos P, P' y el centro de masa C, son únicos y tienen un interés especial. Por definición, el centro de masa del cilindro se mueve con velocidad $v_c = R\omega$, en tanto que el punto de contacto P tiene velocidad cero. Entonces, se concluye que el punto P' debe tener una velocidad $v_P = 2v_c = 2R\omega$, dado que todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad angular y la distancia PP' es dos veces la distancia PC.

Ahora se lleva a cabo el procedimiento inverso, considerando la energía cinética del cuerpo rígido. Para rotación instantánea pura, la energía cinética total del cuerpo rígido que rueda sin deslizar, está dada por

$$E_k = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \tag{4.50}$$

siendo I_P el momento de inercia del cuerpo rígido respecto al eje instantáneo que pasa por el punto de contacto P.

De acuerdo con el teorema de Steiner, el momento de inercia del cuerpo rígido respecto a un eje que pasa por el punto de contacto P, está

dado por

$$I_P = I_c + MR^2, \tag{4.51}$$

donde I_c es el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje que pasa por el centro de masa, M es la masa del cuerpo y R la separación entre los ejes, coincidente con el radio.

Reemplazando la ecuación (4.51) en la ecuación (4.50) y utilizando la relación $v_c = R\omega$, finalmente se encuentra que la energía cinética total del cuerpo es

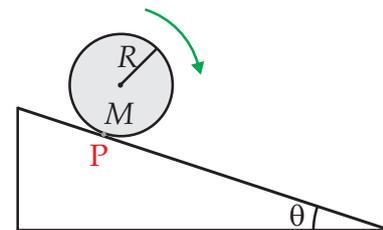
$$E_k = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M v_c^2. \tag{4.52}$$

En la ecuación (4.52), se observa que el primer término de la derecha corresponde a la energía cinética de rotación del cuerpo, respecto a un eje que pasa por su centro de masa, y el segundo término corresponde a la energía cinética de traslación del centro de masa.

Por lo anterior, se tiene nuevamente que los efectos combinados de traslación del centro de masa y de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa, son equivalentes a una rotación instantánea pura con la misma velocidad angular con respecto a un eje que pasa por el punto de contacto de un cuerpo que va rodando sin deslizar.

Ejemplo 4.18.

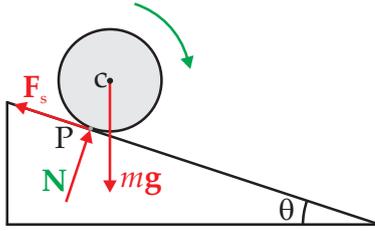
Resolver el ejemplo 4.13, considerando el eje instantáneo de rotación.



Solución

En el diagrama de cuerpo libre, se observa que las líneas de acción de la normal N y de la fuerza de fricción estática F_s, están aplicadas en el punto de contacto del cascarón con la superficie sobre la cual rueda sin deslizar.

Ahora, como el cascarón rueda sin deslizar, este se comporta como si instantáneamente rotara alrededor de un eje que



pasa por el punto de contacto P. De este modo, la ecuación de movimiento para la rotación instantánea pura, es de la forma

$$\circlearrowright + \sum_i \tau_P = I_P \alpha. \quad (1)$$

Por otro lado, como el peso mg es la única fuerza que genera rotación respecto al punto P, la ecuación (1), con $I_P = I_C + MR^2$, se transforma en

$$g \operatorname{sen} \theta = \frac{5}{3} R \alpha, \quad (2)$$

donde se ha tomado el sentido horario como positivo y se cumple la expresión $I_C = \frac{2}{3} MR^2$.

Por consiguiente, de la ecuación (2) se tiene que la aceleración del cascarón es

$$\alpha = \frac{3}{5} \frac{g \operatorname{sen} \theta}{R},$$

y la aceleración del centro de masa, con $a_c = \alpha R$, es

$$a_c = \frac{3}{5} g \operatorname{sen} \theta.$$

Estos resultados, al ser idénticos a los obtenidos en el ejemplo 4.13, muestran que realmente el cascarón se comporta como si rotara instantáneamente respecto al eje que pasa por el punto de contacto P.

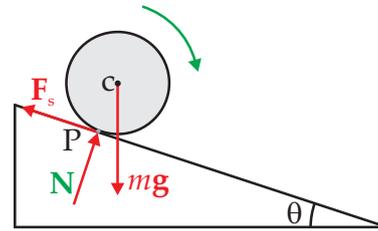
Para determinar la fuerza de fricción es necesario recurrir al método utilizado en el ejemplo 4.13, ya que este método no permite obtenerla.

Ejercicio 4.19.

Resuelva el ejemplo 4.18, si el cascarón esférico se cambia por a) Una esfera maciza. b) Un cilindro o disco. c) Un aro. En cada caso, suponga que la masa es M y el radio es R . Compare los resultados con los obtenidos en el ejemplo 4.18.

Ejemplo 4.19.

Determine, en función de la velocidad angular, la energía cinética total del cascarón esférico del ejemplo 4.16, considerando el eje instantáneo de rotación.



Solución

Para rotación instantánea pura, la energía cinética total del cascarón se obtiene mediante la expresión

$$E_k = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \quad (1)$$

donde el momento de inercia del cascarón, respecto al eje instantáneo de rotación, es

$$I_P = \frac{2}{3} MR^2 + MR^2. \quad (2)$$

Reemplazando la ecuación (2) en la ecuación (1), se obtiene

$$E_k = \frac{5}{6} MR^2 \omega^2,$$

resultado idéntico al encontrado en el ejemplo 4.16, para la energía cinética total del cascarón.

Ejercicio 4.20.

Resuelva el ejemplo 4.19, si se cambia el cascarón esférico por a) Una esfera maciza. b) Un cilindro o disco. c) Un aro. En cada caso, suponga que la masa es M y el radio es R . Compare los resultados con el obtenido en el ejemplo 4.19.

Ejemplo 4.20.

Una rueda acanalada o "yo-yo", de masa M y radio R , desciende sin deslizar sobre un carril inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. La rueda está apoyada sobre su eje de radio r . Despreciando el momento de inercia del eje, determine a) La aceleración del centro de masa de la rueda y su aceleración angular. b) La fuerza fricción que actúa sobre el eje. Resuelva el problema por dos métodos diferentes.

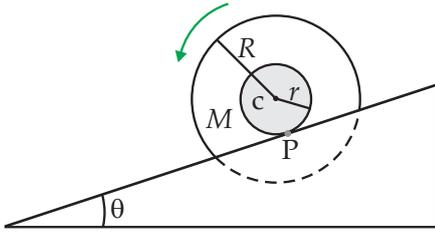
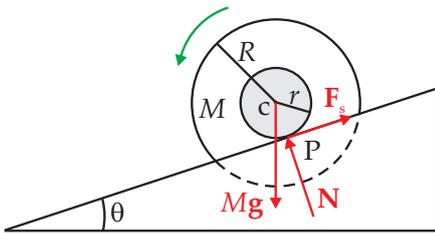
**Solución**

Diagrama de cuerpo libre, donde las fuerzas que actúan sobre la rueda son la normal N , el peso mg y la fuerza de fricción estática F_s .



Método 1: *Movimiento combinado de traslación y rotación*

De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre, las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \checkmark + \sum_i F_x &= Ma_c, \\ \sphericalangle + \sum_i F_y &= 0, \\ \odot \sum_i \tau_c &= I_c \alpha, \end{aligned}$$

adquieren la forma

$$Mg \sin \theta - F_s = Ma_c, \quad (1)$$

$$N - mg \cos \theta = 0, \quad (2)$$

$$F_s r = \frac{1}{2} MR^2 \alpha. \quad (3)$$

a) Mediante las ecuaciones (1) y (3), con $a_c = \alpha r$, se encuentra que la aceleración de la rueda está dada por

$$a_c = \frac{2r^2 g \sin \theta}{R^2 + 2r^2}. \quad (4)$$

Si la ecuación (4) se escribe en la forma

$$a_c = \frac{g \sin \theta}{\frac{R^2}{2r^2} + 1},$$

se tiene que para un ángulo de inclinación constante, entre mayor sea el radio del eje

de la rueda, la aceleración del centro de masa se hace mayor, obteniéndose el máximo valor en el caso que $R = r$, donde la aceleración sería

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \theta.$$

Por medio de la ecuación (4), con $a_c = \alpha r$, se tiene que la aceleración angular de la rueda es

$$\alpha = \frac{2r g \sin \theta}{R^2 + 2r^2}. \quad (5)$$

b) Mediante las ecuaciones (1) y (4) o (3) y (5), se encuentra que la fuerza de fricción está dada por

$$F_s = \frac{MgR^2 \sin \theta}{R^2 + 2r^2}.$$

Se observa que para una inclinación constante, la fuerza de fricción disminuye al incrementar el radio del eje de la rueda, adquiriendo su máximo valor, cuando el eje coincide con el borde exterior de la rueda, en cuyo caso

$$F_s = \frac{1}{3} Mg \sin \theta.$$

Método 2: *Eje instantáneo de rotación.*

a) En el diagrama de cuerpo libre, se observa que la normal y la fuerza de fricción están aplicadas en el punto de contacto P. Esto hace que el peso Mg sea la única fuerza que genera rotación instantánea pura, alrededor del eje que pasa por P. Así, la ecuación de movimiento es de la forma

$$\odot \sum_i \tau_P = I_P \alpha.$$

Ahora, al tomar el sentido antihorario como positivo y empleando el teorema de Steiner con $I_c = \frac{1}{2} MR^2$, la ecuación (6) adquiere la forma

$$g r \sin \theta = \left(\frac{1}{2} R^2 + r^2 \right) \alpha.$$

Así, la aceleración del centro de masa, con $a_c = \alpha r$ y por la ecuación (9), está dada por

$$a_c = \frac{2r^2 g \sin \theta}{R^2 + 2r^2},$$

y la aceleración angular por

$$\alpha = \frac{2r g \sin \theta}{R^2 + 2r^2},$$

que son resultados idénticos a los encontrados en el método anterior.

b) Para determinar la fuerza de fricción, se debe emplear la ecuación de movimiento para la traslación del centro de masa, ya que por este método no es posible.

4.14. Equilibrio de un cuerpo rígido

De acuerdo con la sección 4.4, siempre es posible reemplazar un sistema de fuerzas, actuando sobre un cuerpo rígido, por un sistema fuerza-par aplicado en un punto arbitrario y que es completamente equivalente en lo referente a traslación y rotación. En el caso particular que la fuerza y el par sean cero, el sistema de fuerzas externas forma un sistema equivalente fuerza-par nulo, es decir, no tienden a imprimir ningún efecto de traslación ni de rotación sobre el cuerpo rígido. Cuando esto ocurre, se dice que el cuerpo rígido se encuentra en equilibrio.

Lo anterior, se puede expresar en forma matemática como sigue. -

Que la fuerza del sistema fuerza-par, no tienda a imprimir efectos de traslación, significa

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_i \mathbf{F}_i \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.53)$$

o en componentes rectangulares, la ecuación (4.52) lleva a las expresiones

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, \\ \sum F_y &= 0, \\ \sum F_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

- Que el par del sistema fuerza-par, no tienda a imprimir efectos de rotación, quiere decir

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_i \tau_i \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Igualmente, al descomponer la ecuación (4.55) en componentes rectangulares, se obtienen las

expresiones

$$\begin{aligned} \sum \tau_x &= 0, \\ \sum \tau_y &= 0, \\ \sum \tau_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

En el caso particular que las fuerzas actúen sobre un plano, por ejemplo en el plano xy , se dispone de las expresiones

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, \\ \sum F_y &= 0, \\ \sum \tau_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Las ecuaciones (4.57) son de validez general, y particularmente la sumatoria de torques se satisface respecto a cualquier punto, siempre y cuando el cuerpo rígido esté en equilibrio.

4.14.1. Equilibrio de un cuerpo rígido sometido sólo a dos fuerzas

Si un cuerpo rígido está en equilibrio, sometido únicamente a la acción de dos fuerzas, el torque total de las dos fuerzas respecto a cualquier punto es nulo. Así, al considerar los puntos de aplicación de las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 en la figura 4.36 (a), se tiene

$$\sum \tau_A = 0,$$

condición que se satisface siempre y cuando la línea de acción de la fuerza \mathbf{F}_2 pase por el punto A como se ilustra en la figura 4.36 (b).

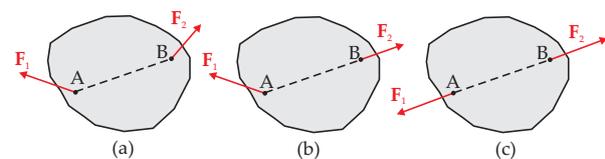


Figura 4.36: Cuerpo rígido sometido sólo a dos fuerzas.

Igualmente, respecto al punto B también se debe cumplir la condición

$$\sum \tau_B = 0,$$

por lo que en este caso, la línea de acción de \mathbf{F}_1 debe pasar por el punto B como lo muestra la figura 4.36 (c).

Por otro lado, como se presenta equilibrio de traslación, esto es

$$\sum \mathbf{F} = 0,$$

se debe cumplir que $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$.

En síntesis, si un cuerpo rígido sometido a la acción de dos fuerzas se haya en equilibrio, las dos fuerzas deben tener igual magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos.

4.14.2. Equilibrio de un cuerpo rígido sometido sólo a tres fuerzas

Igual que en el caso anterior, si el cuerpo rígido está en equilibrio sometido solamente a la acción de tres fuerzas, figura 4.37 (a), se cumple la condición $\sum \tau = 0$, donde los torques son evaluados respecto al mismo punto.

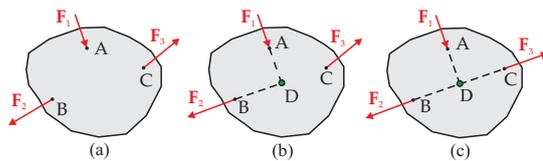


Figura 4.37: Cuerpo rígido sometido sólo a tres fuerzas.

Como en la figura 4.37 (b) las líneas de acción de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 se cortan en el punto el punto D, entonces $\sum \tau_D = 0$, por lo que la línea de acción también debe pasar por D para garantizar el equilibrio, como se muestra en la figura 4.37 (c).

Así, las tres fuerzas deben ser tales que sus líneas de acción sean concurrentes, o se corten en algún punto, para garantizar que el cuerpo rígido se encuentre en equilibrio.

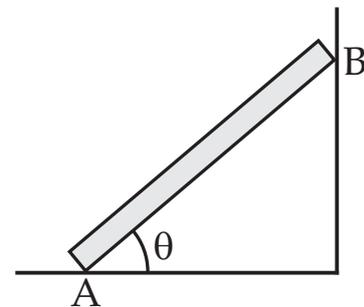
En la solución de problemas de equilibrio de un cuerpo rígido, se deben seguir los siguientes pasos

1. Analizar el *diagrama espacial*.
2. Hacer el *diagrama de cuerpo libre*, teniendo en cuenta las conexiones y apoyos que muestre el diagrama espacial.
3. Plantear las ecuaciones de equilibrio, tanto traslacional como rotacional.

4. Resolver las ecuaciones obtenidas.
5. Verificar las dimensiones y unidades en las respuestas encontradas.

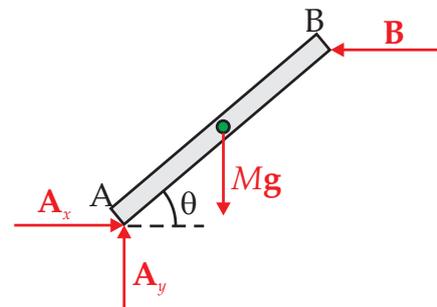
Ejemplo 4.21.

La varilla AB, de longitud L y masa M , permanece en la posición mostrada. Si la pared es lisa y la superficie horizontal es rugosa, determine a) Las reacciones en los extremos de la varilla. b) La fuerza de fricción estática, si el movimiento de la varilla es inminente y el coeficiente de fricción en el extremo A es μ . c) Los valores de las cantidades obtenidas en los numerales anteriores, para $M = 3\text{kg}$, $\theta = 25^\circ$ y $\mu = 0.25$.



Solución

Diagrama de cuerpo libre



En el extremo B sólo actúa la normal \mathbf{B} que la pared lisa ejerce sobre la varilla, mientras que en el extremo A actúan, la fuerza \mathbf{A}_x debida a la fricción estática entre la varilla y la superficie horizontal y la normal \mathbf{A}_y ejercida por el piso. Por otro lado, el peso de la varilla actúa en su centro de masa, coincidente con el centro geométrico si es homogénea como se supone en este caso.

Ecuaciones de movimiento. Como la varilla permanece en la posición mostrada, quiere decir que está en equilibrio

estático, esto es, se deben cumplir simultáneamente las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, \\ A_x - B &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0, \\ A_y - Mg &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

y tomando el sentido antihorario como positivo

$$\begin{aligned} \sum \tau_A &= 0 \\ -\frac{1}{2}MgL\cos\theta + BL\sin\theta &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

a) Mediante las ecuaciones (1), (2) y (3), se encuentra que las reacciones en los extremos de la varilla están dadas por

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}Mg\cot\theta \leftarrow$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}Mg\csc\theta\sqrt{1+3\sin^2\theta} \angle \tan^{-1}(2\tan\theta). \quad (5)$$

b) En general, entre la fuerza de fricción estática y la normal de la superficie se cumple la relación

$$F_s \leq \mu N. \quad (6)$$

Ahora, como el movimiento es inminente, la ecuación (6) adquiere la forma

$$F_s = \mu N. \quad (7)$$

Por las ecuaciones (1), (2) y (7), con $A_x = F_s$ y $A_y = N$, la fuerza de fricción estática es

$$A_x = \mu Mg. \quad (8)$$

c) Reemplazando valores en las ecuaciones (4), (5) y (8), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= 31.52\text{N} \leftarrow . \\ \mathbf{A} &= 43.11\text{N} \angle 43^\circ. \\ \mathbf{F}_s &= 7.35\text{N} \rightarrow . \end{aligned}$$

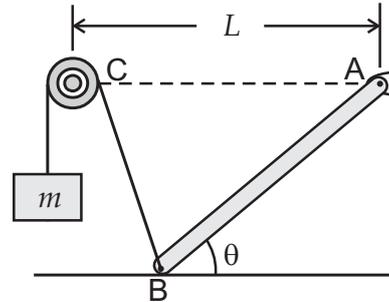
Ejercicio 4.21.

Analice la situación que se presenta, cuando en el ejemplo 4.21 se supone que el piso es liso y la pared es rugosa.

Ejemplo 4.23.

La varilla AB de longitud L y masa M , conectada a una articulación en el extremo A, está unida a un bloque de masa m , mediante una cuerda que pasa por una polea

ideal fija. La superficie horizontal es lisa. Determine a) La masa mínima del bloque, que permite levantar la varilla del piso. b) Las componentes rectangulares de la reacción en A y la tensión en la cuerda. c) La masa mínima m , la reacción en A y la tensión en la cuerda, para $M = 2\text{kg}$ y $\theta = 40^\circ$.



Solución

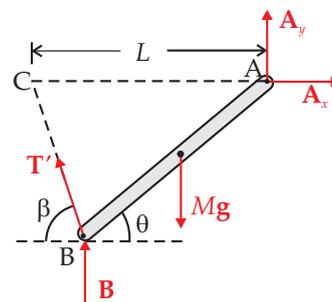
De acuerdo con el diagrama espacial, el triángulo ABC es isósceles. De ahí que el ángulo que forma la cuerda con la horizontal es

$$\beta = 90 - \frac{1}{2}\theta. \quad (1)$$

Diagramas de cuerpo libre
Para el bloque



Para la varilla



Ecuaciones de movimiento
Para el bloque

$$+\uparrow \sum F_y = 0,$$

$$T - mg = 0. \quad (2)$$

Para la varilla

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= 0, \\ A_x - T \cos \beta &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y &= 0, \\ B + T \sin \beta - Mg + A_y &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

y tomando el sentido antihorario como positivo

$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum \tau_A &= 0, \\ \frac{1}{2}MgL \cos \theta - BL \cos \theta - TL \sin \beta &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

a) Para determinar la masa mínima m , se considera el instante en el cual la varilla deja de tener contacto con el piso, esto es, en el momento que la normal \mathbf{B} se hace cero. Así, mediante las ecuaciones (1), (2) y (5), se llega a la expresión

$$m = \frac{1}{2}M \cos \theta \sec \frac{1}{2}\theta. \quad (6)$$

b) Con ayuda de las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (6), se encuentra que las componentes rectangulares de la reacción en A, están dadas por

$$A_x = \frac{1}{2}Mg \cos \theta \tan \frac{1}{2}\theta, \quad (7)$$

$$A_y = \frac{1}{2}Mg(2 - \cos \theta). \quad (8)$$

Reemplazando la ecuación (6) en la ecuación (2), la tensión en la cuerda es

$$T = \frac{1}{2}Mg \cos \theta \sec \frac{1}{2}\theta. \quad (9)$$

c) Por la ecuación (6), la masa mínima tiene el valor

$$m = 0.82 \text{ kg.}$$

Reemplazando valores en las ecuaciones (7) y (8), es posible encontrar que la reacción en A es

$$\mathbf{A} = 12.4 \text{ N} \quad \angle \quad 77.27^\circ.$$

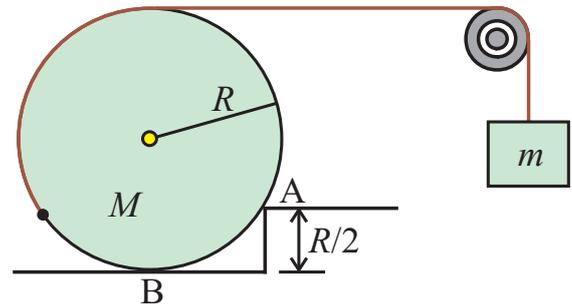
Finalmente, por la ecuación (9), la tensión en la cuerda está dada por

$$\mathbf{T} = 7.99 \text{ N} \quad \angle \quad 70^\circ,$$

donde la dirección corresponde al ángulo β mostrado en el diagrama de cuerpo libre.

Ejercicio 4.22.

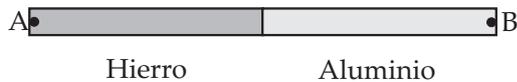
El disco de masa M y radio R , está unido a un bloque de masa m , mediante una cuerda que pasa por una polea ideal fija. Determine a) La masa mínima m que le permite al disco subir escalón de altura $\frac{1}{2}R$. b) Las componentes rectangulares de la reacción en A y la tensión en la cuerda. c) La masa mínima m , la reacción en la esquina A y la tensión en la cuerda, para $M = 1.5 \text{ kg}$ y $R = 20 \text{ cm}$.



PREGUNTAS

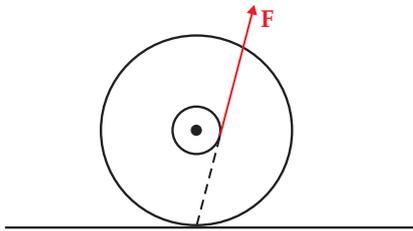
1. Se dispone de dos llaves de contención, una más larga que la otra. Si se desea aflojar un tubo, ¿cuál de las dos llaves es más adecuada para llevar a cabo esta operación? ¿Por qué?
2. Suponga que dispone de un plano inclinado y de una esfera que puede rodar sin deslizar sobre él. Explique cómo podría determinar si la esfera es hueca o no.
3. Una persona se encuentra sentada en una silla giratoria con los brazos extendidos. La silla rota con velocidad angular constante y en las manos se sostienen masas iguales. ¿Qué efecto se presenta cuando se sueltan las masas? Justifique la respuesta.
4. Considere una persona que se encuentra sobre un tornamesa horizontal, el cual puede girar libremente alrededor de un eje que pasa por su centro. ¿Qué le ocurre al tornamesa cuando la persona se desplaza alrededor de su perímetro? Explique su respuesta.
5. Se tiene una varilla compuesta, formada por dos varillas delgadas de igual longitud, como se muestra en la figura. Se obtiene el momento de inercia de la varilla compuesta respecto a un eje que pasa por A, y respecto a un eje que pasa por

B. ¿Son iguales estos dos momentos de inercia? Justifique su respuesta.

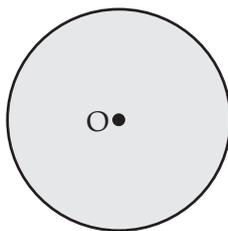


6. Un disco que ha partido del reposo y desde una altura h , oscila en el interior de un riel cuya superficie es rugosa. El disco rueda sin deslizar y alcanza a ambos lados de la superficie circular una altura determinada, luego de pasar por el fondo. a) A medida que transcurre el tiempo, ¿la altura alcanzada por el disco aumenta, disminuye o permanece igual a h ? Justifique su respuesta. b) ¿Qué transformaciones de energía se presentan a medida que el disco oscila? Justifique su respuesta.

7. El cuerpo de la figura que se encuentra inicialmente en reposo, puede rodar sin deslizar por la superficie horizontal. Cuando se aplica la fuerza F mediante una cuerda enrollada alrededor del pequeño saliente, ¿qué le sucede al cuerpo? Justifique su respuesta.



8. El disco de la figura puede rotar alrededor de un eje fijo que pasa por su centro O. a) ¿Se presenta alguna diferencia en el momento de inercia del disco respecto al eje, si este se encuentra en reposo o en movimiento? ¿Por qué? b) ¿Para que el disco esté en equilibrio, necesariamente debe estar en reposo? ¿Por qué? c) Si el disco rota con velocidad angular constante, ¿qué otra cantidad física no cambia? ¿Por qué?



9. Como se ilustra en la figura, una esfera descansa sobre dos superficies que forman entre sí un ángulo θ . a) ¿Qué condición deben cumplir las líneas de acción de las fuerzas que actúan sobre la esfera? Justifique su respuesta. b) ¿La condición anterior depende del valor del ángulo? ¿Por qué?

