2 DINAMICA DE UNA PARTICULA

BERNARDO ARENAS GAVIRIA
Universidad de Antioquia
Instituto de Física

2010

Índice general

Capítulo 2

Dinámica de una partícula

Objetivos
En esta unidad se busca que el estudiante

- Identifique y defina el concepto de vector momento lineal.
- Distinga entre sistema aislado y sistema no aislado.
- Identifique la relación entre interacción y cambio en el momento lineal de una partícula.
- Analice el principio de conservación del vector momento lineal total de un sistema aislado.
- Enuncie y exprese matemáticamente las leyes de Newton.
- Relacione las leyes de Newton con los conceptos de: inercia, fuerza y acción a distancia.
- Obtenga la fuerza neta que actúa sobre una partícula.
- Analice y resuelva situaciones de equilibrio de una partícula.
- Descubra los efectos de la fuerza de fricción sobre el movimiento de los cuerpos.
- Infiera la diferencia entre los diferentes tipos de fricción.
- Enuncie y opere adecuadamente la ley de Hooke.
- Aplique correctamente las leyes de Newton tanto en el movimiento rectilíneo, como en el movimiento curvilíneo de una partícula.
- Identificar las componentes tangencial y normal de la fuerza, como las causas del cambio en el estado de los cuerpos.
- Aplicar las leyes de Newton al movimiento circular de partículas.
- Defina el concepto de vector momento angular de una partícula en movimiento.
- Analice la variación del vector momento angular con el tiempo, para una partícula en movimiento.
- Analice situaciones físicas en las cuales se conserva el vector momento angular de una partícula.

CONCEPTOS BASICOS
En esta unidad de dinámica de una partícula, se definirán los siguientes conceptos que son básicos en el estudio del movimiento de los cuerpos: Sistema, cuerpo o cuerpos de interés, medio ambiente o alrededores, momento lineal ($\mathbf{p}$), inercia, vector fuerza $\mathbf{F}$), par acción-reacción, equilibrio, fricción, fuerza elástica, fuerza tangencial ($\mathbf{F}_T$), fuerza normal ($\mathbf{F}_N$),momento angular ($\mathbf{L}$).

2.1. Introducción

En esta unidad se inicia el estudio de la segunda parte de la mecánica, denominada dinámica, en la cual se consideran las causas por las que cambia el estado de reposo ó de movimiento de un cuerpo, cuando este interactúa con otros cuerpos.

Para su estudio, se dispone de los conceptos cinemáticos descritos y analizados en la unidad anterior. Igual que en la cinemática, sólo se considera el movimiento de traslación de los cuerpos, o sea, que estos se pueden tratar bajo el modelo de partícula, de ahí el nombre de la unidad.

Cuando se va a analizar el comportamiento dinámico de un cuerpo, lo primero que se hace es llevar a cabo los siguientes pasos:

- Definir un *sistema*, que generalmente está formado por varios cuerpos.

- Elegir, del sistema, el cuerpo al cual se le va a analizar el movimiento, es decir, el *cuerpo o partícula de interés*.

- Delimitar el *medio ambiente o alrededores*, formado por el resto del sistema, o sea, por los cuerpos cercanos que interactúan con el cuerpo de interés.

Para aclarar los pasos anteriores, se consideran las siguientes situaciones

1. *Sistema cuerpo-tierra*: Proyectil que se lanza desde el punto A con una velocidad que forma un ángulo con la horizontal.

   En el sistema de la figura 2.1, tomando el proyectil como cuerpo o partícula de interés, los alrededores lo conforman el aire y la tierra.

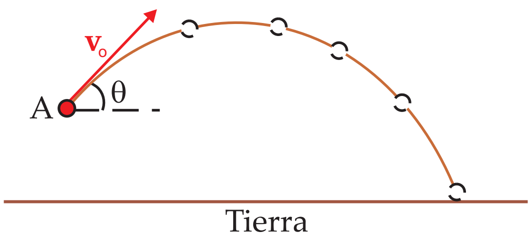


Figura 2.1: *Proyectil lanzado desde el punto A.*

2. *Sistema masa-resorte*: Bloque sujeto a un resorte y en movimiento sobre una superficie plana. Para el sistema de la figura 2.2.a ó 2.2.b, si el bloque se toma como cuerpo o partícula de interés, los alrededores lo conformarán el resorte, la superficie plana, el aire y la tierra.

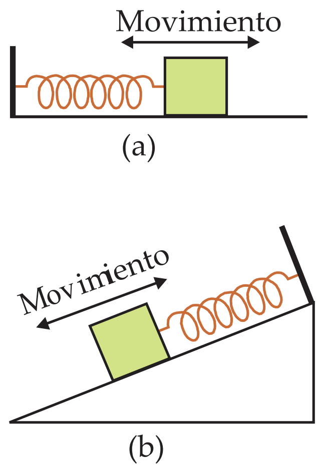


Figura 2.2: *Bloque sujeto a un resorte sobre una superficie a) horizontal, b) inclinada.*

3. *Sistema satélite-tierra*: Satélite que rota alrededor de la tierra. En el sistema de la figura 2.3, el cuerpo o partícula de interés puede ser el satélite, o sea que el medio ambiente corresponde a la tierra.

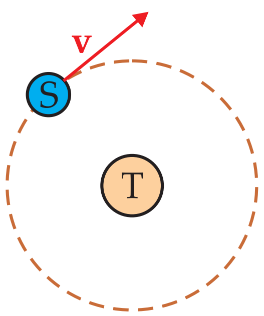


Figura 2.3: *Satélite que rota alrededor de la tierra.*

En los tres casos anteriores, se observa que los alrededores sólo incluyen el medio o los cuerpos más cercanos al cuerpo de interés, ya que los efectos de los cuerpos más alejados generalmente son insignificantes. De este modo, en estas situaciones o en cualquier otra, lo que se busca es analizar la forma como es afectado el movimiento de traslación del cuerpo de interés por los alrededores. Así, el movimiento del cuerpo queda determinado por la acción del medio ambiente sobre él.

Como se verá en lo que sigue, el objetivo último de la dinámica es poder predecir, en un problema mecánico específico, cómo se seguirá moviendo una partícula cuando sus alrededores y condiciones iniciales se conocen. Una vez realizado lo anterior, se dice que se ha resuelto completamente el problema dinámico, lo que matemáticamente equivale a conocer la forma como varía el vector posición con el tiempo, es decir, conocer la forma explícita de $\mathbf{r}(t)$.

2.2. Momento lineal o cantidad de movimiento (p)

Antes de analizar las leyes de movimiento o leyes de Newton, es necesario hacer referencia a las cantidades dinámicas *masa* y *momento lineal* que son el punto de partida de la mayoría de los conceptos que se tratarán en adelante.

La física dispone de una cantidad escalar que es característica o propia de cada cuerpo y la cual permite conectar la cinemática de una partícula con la dinámica de una partícula; esta propiedad de los cuerpos es su *masa*. En lo que sigue, no se hace una definición operacional de la masa, sino que en su lugar se emplea el concepto intuitivo que de ella se tiene, esto es, lo que marca una balanza cuando un cuerpo se coloca sobre ella.

La masa de un cuerpo, que se representa mediante los símbolos M o m, es una cantidad fundamental cuya dimensión es M. De acuerdo con esta dimensión, las unidades respectivas son: el kilogramo (kg) en el sistema de unidades SI, y el gramo (g) en el sistema gaussiano de unidades. En el sistema inglés la unidad de masa es el slug, que se definirá más adelante.

La equivalencia entre estas unidades está dada por la identidad: $1\text{kg} \equiv 10^3\text{g}$.

La primera cantidad dinámica a definir, es el *momento lineal* o *cantidad de movimiento*, que es de gran importancia en la física ya que permite obtener más información que la velocidad.

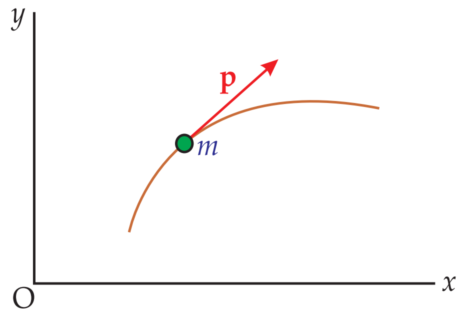


Figura 2.4: *Momento lineal de una partícula.*

Cuando una partícula de masa m, posee una velocidad $\mathbf{v}$ respecto a determinado observador, se dice que su vector momento lineal está dado por

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}. \tag{2.1}$$

De acuerdo con la definición dada por la ecuación (2.1), se tiene que el momento lineal es una cantidad vectorial que apunta en la misma dirección del vector velocidad, como se ilustra en la figura 2.4.

Además, como la velocidad depende del sistema de referencia, entonces el momento lineal también depende del sistema de referencia. Igualmente, como la velocidad es tangente a la trayectoria descrita por la partícula, el momento lineal también es tangente a la trayectoria que la partícula describe.

Dimensiones y unidades del vector momento lineal

De acuerdo con la definición de momento lineal, se tiene que sus dimensiones son iguales a la dimensión de masa por la dimensión de velocidad, es decir $[\mathbf{p}] = [m][\mathbf{v}] = \text{MLT}^{-1}$. Por lo tanto, las unidades en los respectivos sistemas están dadas por: $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ en el sistema SI de unidades, $\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ en el sistema gaussiano de unidades y $\text{lb} \cdot \text{s}$ en el sistema inglés de unidades.

En el ejemplo 2.1, se ilustra el hecho que el momento lineal permite obtener mayor información que la velocidad.

Ejemplo 2.1.
Los cuerpos de la figura 2.5, que tienen

masas M y m ($M > m$), se mueven con igual velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema de referencia mostrado. ¿Cuál es más difícil llevar al estado de reposo?

Solución
La experiencia muestra que el cuerpo con mayor momento lineal, es más difícil de llevar al estado de reposo. Lo anterior indica que aunque cinemáticamente no existe diferencia entre el estado de los dos cuerpos, velocidades iguales, dinámicamente se presenta una diferencia como consecuencia de la diferencia en sus momentos lineales.

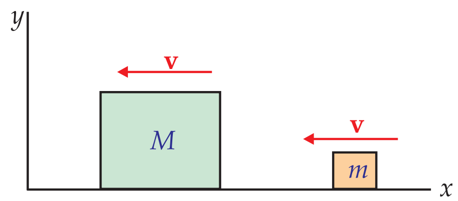


Figura 2.5: *Cuerpos de diferente masa se mueven con igual velocidad.*

Ejemplo 2.2.
Una partícula de masa 2 g, tiene un movimiento circular cuya posición angular está dada por $\theta = 2 + 3(t-1) - (t-1)^2$, donde θ está dada en rad y t en s. El radio de la trayectoria circular es 0.50 m. Hallar la magnitud del momento lineal de la partícula, en función del tiempo.

Solución
Mediante la definición de velocidad angular, ecuación (1.66), y la relación entre velocidad y velocidad angular, ecuación (1.84), se encuentra que la velocidad de la partícula en cualquier instante está dada por

$$v = 2.5 - t.$$

Finalmente, por la ecuación (2.1), se encuentra que la magnitud del momento lineal en función del tiempo, está dada por

$$p = 2 \times 10^{-3}(2.5 - t),$$

donde p está dado en $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$ y t en s.

De acuerdo con el resultado obtenido, en este caso, se tiene que tanto la magnitud de la velocidad como del momento lineal de la partícula, disminuyen con el tiempo. Lo anterior, se debe a que la partícula posee un movimiento circular uniformemente retardado.

Ejercicio 2.1.
Una partícula de masa 2 g, tiene un movimiento circular en el cual la magnitud de su momento lineal está dada por $p = 2 \times 10^{-3}(2.5 - t)$, donde p está dado en $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$ y t en s. Halle a) el instante en el cual el momento lineal de la partícula se hace cero. b) La magnitud del momento lineal de la partícula a los 2 s de iniciado el movimiento.

2.2.1. Conservación del momento lineal

Aunque solo se consideran dos casos particulares, el principio de conservación del momento lineal tiene validez general, sin importar el número de partículas que intervienen en un sistema. Este principio es de gran utilidad en la física, tanto desde un punto de vista teórico como experimental. En los dos casos que se consideran a continuación, se recurre a los resultados que muestra el experimento, cuando este se lleva a cabo.

1. Como primer experimento se considera la situación en la que a una partícula, de masa m y en movimiento, se le impide interactuar con cualquier otra, como se ilustra en la figura 2.6. Al no interactuar la partícula con ninguna otra, el resultado que se obtiene es que su estado de movimiento no es alterado, esto es, su velocidad permanecerá constante, o lo que es igual, su momento lineal debe permanecer constante. Lo anterior se puede expresar matemáticamente en la forma

$$p = mv = \text{Constante} \quad \text{o sea} \quad \Delta p = 0$$

2. En el segundo experimento, como se indica en la figura 2.7, se aíslan, del resto del universo, dos partículas con masas constantes m_1

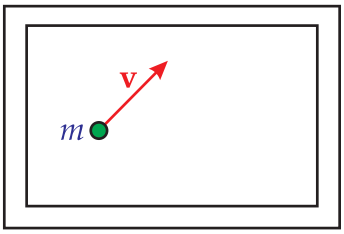


Figura 2.6: *Conservación del momento lineal de una partícula aislada.*

y m_2. Decir que se aíslan del resto del universo, equivale a afirmar que sólo se permiten sus interacciones mutuas. A un sistema como este se le llama *sistema aislado*.

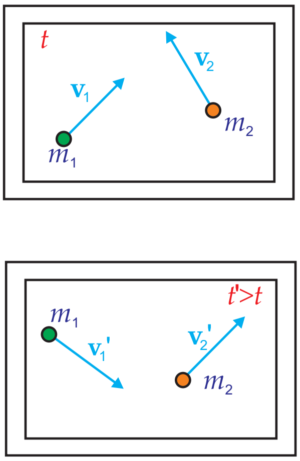


Figura 2.7: *Momento lineal de dos partículas aisladas.*

Cuando a las partículas se les permite interactuar entre sí, se encuentra que sus momentos lineales individuales pueden cambiar al transcurrir el tiempo. Por otro lado, el momento lineal total del sistema formado por las dos partículas, en cualquier instante, está dado por la suma de los momentos lineales de las partículas. De acuerdo con lo anterior, en el instante t el momento lineal del sistema aislado, está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ &= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2, \end{aligned} \tag{2.2}$$

y en el instante posterior t' por

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \\ &= m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Cuando se realiza este experimento, se encuentra que independientemente de los valores de t y t', el momento lineal total del sistema permanece constante, o sea,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' \tag{2.4}$$

Como la ecuación (2.4) es válida para cualquier número de partículas que conformen el sistema, se puede enunciar el principio de conservación del momento lineal, en la forma: *El momento lineal total de un sistema aislado de partículas, permanece constante*.

De este modo, el momento lineal ganado (perdido) por una partícula, es perdido (ganado) por el resto del sistema.

Para la situación que interesa en este momento, se tiene que el momento lineal ganado (o perdido) por una partícula, es perdido (o ganado) por la otra partícula; así, al reemplazar las ecuaciones (2.2) y (2.3) en la ecuación (2.4) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \\ &= \text{Constante}, \end{aligned}$$

o lo que es igual

$$\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2, \tag{2.5}$$

de donde, el momento lineal que gana una partícula es igual al momento lineal que pierde la otra.

Como consecuencia de este resultado, de validez general, el cambio en el momento lineal de una partícula se debe a su interacción con otra u otras partículas. En conclusión, *toda interacción entre partículas genera cambios en sus momentos lineales individuales*.

A diario se presentan situaciones en las que se manifiesta la conservación del momento lineal. Por ejemplo, cuando un rifle en reposo respecto a la tierra es disparado, se observa que el rifle retrocede. Este retroceso es una consecuencia del principio de conservación del momento lineal, ya que en este caso, el momento lineal total del sistema inmediatamente antes del disparo e inmediatamente después del disparo, debe ser nulo.

2.3. Leyes de Newton del movimiento

En esta sección, se consideran las leyes que rigen el cambio en el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo. A partir de ellas y con ayuda de los conceptos vistos en la unidad de cinemática de una partícula, es posible llegar a conocer la forma como varía la posición de una partícula con el tiempo $[\mathbf{r}(t)]$.

2.3.1. Primera ley de Newton o ley de inercia

De acuerdo con la situación considerada en el primer experimento de la sección 2.2.1, todo cuerpo permanecerá en estado de reposo (momento lineal cero) o de movimiento rectilíneo uniforme (momento lineal constante), mientras ningún otro cuerpo interactúe con él, o lo que es igual, mientras ningún otro cuerpo lo obligue a cambiar dicho estado; cinemáticamente, esto significa que su aceleración es cero. Cuando se presenta una de estas dos situaciones, se dice que el cuerpo se encuentra en *equilibrio mecánico* y se habla de *equilibrio estático* si el cuerpo está en reposo, y de *equilibrio dinámico* o *cinético* si el cuerpo tiene movimiento rectilíneo uniforme.

También puede ocurrir que un cuerpo, interactuando con otros cuerpos, permanezca en estado de equilibrio. En este caso, se presenta una situación en la cual las interacciones se anulan entre sí, en otras palabras, el efecto de todas las interacciones es nulo. Por ejemplo, una lámpara suspendida del techo mediante una cuerda, se puede encontrar en estado de equilibrio estático, aunque interactúa simultáneamente con la cuerda y la tierra.

En lenguaje matemático, las situaciones consideradas anteriormente se pueden expresar en la forma

$$\mathbf{v} = 0 \qquad \mathbf{v} = \text{Constante}, \quad \text{es decir} \quad \mathbf{a} = 0.$$

Esta es la forma matemática de expresar la primera ley de Newton, también conocida como la *ley de inercia*, que en palabras se puede enunciar en la forma:

Todo cuerpo permanecerá en un estado de equilibrio mecánico, mientras no interactúe con ningún otro cuerpo.

Como el movimiento de un cuerpo depende del observador, esta ley es prácticamente un enunciado relativo a sistemas de referencia, ya que al enunciarla hay que especificar respecto a cuál sistema de referencia la partícula se encuentra en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme. Se supone que el movimiento de la partícula, está relacionado a un observador sobre el cual la aceleración es cero; a tal observador se le denomina *observador inercial* y a su sistema, *sistema de referencia inercial*.

Se acostumbra definir un sistema de referencia inercial, como aquel que se encuentra en reposo o con movimiento rectilíneo uniforme respecto a la tierra, ya que esta se toma aproximadamente como un sistema de referencia inercial. La aceleración normal de la tierra alrededor del sol es del orden de $4.4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ dirigida hacia el sol, mientras que un punto en el ecuador terrestre, debido a la rotación de la tierra sobre su eje es del orden de $3.37 \times 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ Como consecuencia de esta definición, se tiene que todo sistema de referencia en reposo o con un movimiento rectilíneo uniforme, respecto a un sistema de referencia inercial, también es un sistema de referencia inercial.

En síntesis: *La ley de inercia únicamente es válida respecto a sistemas de referencia inerciales.*

Pregunta :
¿Por qué se dice que la tierra se comporta aproximadamente como un sistema de referencia inercial?

A los sistemas de referencia con aceleración diferente de cero, se les conoce como *sistemas de referencia acelerados* o *sistemas de referencia no inerciales*. Respecto a estos sistemas, no tiene validez la ley de inercia.

A continuación se consideran situaciones comunes, en las que se manifiesta la ley de inercia.

1. En la figura 2.8, se muestra un cuerpo en reposo respecto a una superficie horizontal.

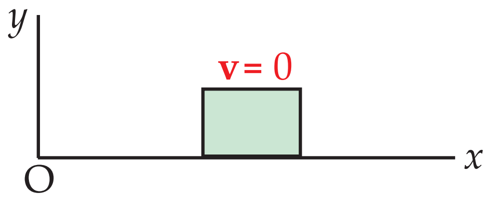


Figura 2.8: *Cuerpo en reposo sobre una superficie horizontal.*

Como el cuerpo está en reposo respecto al piso, su aceleración es cero. Necesariamente, el cuerpo permanecerá en reposo mientras ningún otro cuerpo interactúe con él, obligándolo a cambiar de estado.

Si el cuerpo corresponde a un auto con sus pasajeros, cuando este arranca, los pasajeros ejercen presión sobre el espaldar de su silla, ya que por la ley de inercia tienen una rapidez menor (cero) en el instante que acelera.

2. En la figura 2.9, se tiene un cuerpo sobre una superficie horizontal completamente lisa y con movimiento rectilíneo uniforme.

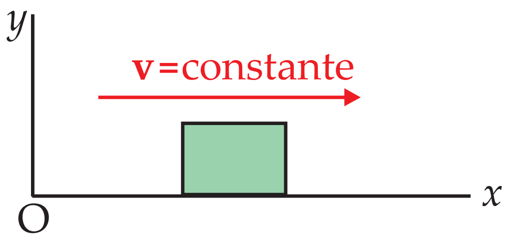


Figura 2.9: *Cuerpo en movimiento sobre una superficie horizontal.*

En este caso, el cuerpo continúa moviéndose con la misma velocidad mientras no interactúe con otro cuerpo.

Si el cuerpo corresponde a un auto con sus pasajeros, cuando este acelera, la ley de inercia se manifiesta cuando el cuerpo aprisiona el espaldar de la silla, debido a la rapidez menor que se tenían en el instante de acelerar.

Por otro lado, cuando frena ocurre lo contrario debido a la ley de inercia, ya que los pasajeros tienen un movimiento involuntario en el sentido de movimiento, debido a la velocidad mayor que se tenían en el instante de frenar.

3. Para no caer al piso, ¿qué debe hacer una persona cuando se baja de un autobús en movimiento?

Cuando una persona desciende de un autobús en movimiento, inmediatamente tiene contacto con el pavimento, debe correr en el mismo sentido del auto para no caer al piso. Esto se debe hacer, ya que por la ley de inercia la persona continúa con la velocidad que tenía en el instante de bajarse. Cuando una persona no lleva a cabo esta acción, lo más seguro es que cae al piso.

Pregunta :
Suponga que se encuentra en el interior de un ascensor. ¿Qué se percibe cuando el ascensor, arranca ascendiendo y arranca descendiendo? Explique sus respuestas.

La ley de inercia también se puede relacionar con el concepto de masa. Para ello, se consideran los cuerpos de masas M y m ($M > m$), mostrados en las figuras 2.10 y 2.11.

- Cuando los dos cuerpos se encuentran en reposo, respecto a un observador inercial, ¿a cuál es más difícil cambiarle su estado de reposo?

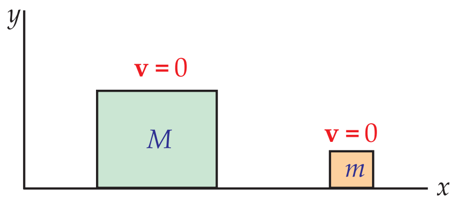


Figura 2.10: *Cuerpos en reposo.*

La experiencia muestra que es más difícil cambiar el estado del cuerpo que tiene mayor masa. De este modo, el cuerpo de masa M presenta más oposición o resistencia a cambiar de estado, en otras palabras, el cuerpo de masa M tiene mayor tendencia a continuar en reposo. En conclusión, el cuerpo de masa M tiene mayor inercia que el cuerpo de masa m.

- Si los dos cuerpos se mueven con igual velocidad, ¿cuál es más difícil llevar al estado de reposo?

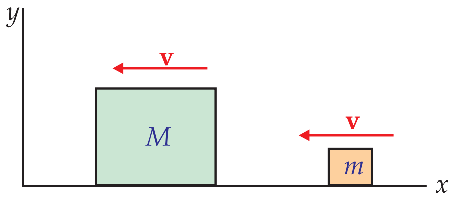


Figura 2.11: *Cuerpos en movimiento.*

Igual que en el caso anterior, el cuerpo de masa M tiene una mayor tendencia a continuar con movimiento rectilíneo uniforme, es decir, que este cuerpo posee mayor inercia.

De estos dos casos, se puede inferir que la masa es una medida de la inercia de los cuerpos. Esto es, la masa es una medida de la resistencia que presentan los cuerpos al cambio de estado y presenta mayor inercia o resistencia el cuerpo que tiene mayor masa. En este sentido, como se verá en la unidad de gravitación universal del curso de Física 2, se hace distinción entre los conceptos de masa inercial y masa gravitacional.

2.3.2. Segunda ley de Newton o ley de fuerza

Si en la situación considerada en la figura 2.7, las partículas interactúan durante un intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t.$, al dividir la ecuación (2.5) por Δt, se tiene

$$\frac{\Delta \mathbf{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \mathbf{p}_2}{\Delta t}. \tag{2.6}$$

Si, además, se hace que $\Delta t \to 0$, la ecuación (2.6) se puede escribir en la forma

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{\Delta t},$$

y por definición de derivada se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_2}{\mathrm{d}t}. \tag{2.7}$$

La ecuación (2.7) muestra que las variaciones respecto al tiempo, del momento lineal de las dos partículas, son iguales y opuestas.

La fuerza que actúa sobre la partícula 1, debido a su interacción con la partícula 2, se define como el cambio con respecto al tiempo del vector momento lineal de la partícula 1, esto es, la fuerza que actúa sobre la partícula 1 es

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}t}. \tag{2.8}$$

La ecuación (2.8), es la forma matemática de expresar la interacción de la partícula 2 sobre la partícula 1, y se conoce como *la segunda ley de Newton, ley de fuerza ó ecuación de movimiento*.

Como m_1 es la masa de la partícula 1, su momento lineal es $p_1 = m_1 v_1$ y la ecuación (2.8) se transforma en

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\mathbf{v}_1). \tag{2.9}$$

Si la masa m_1 es constante, la ecuación (2.9) se convierte en

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= m_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t} \\ &= m_1\mathbf{a}_1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Para el caso particular de masa constante, la segunda ley de Newton queda dada entonces por la ecuación (2.10).

En el caso particular de un cuerpo de masa m, que se mueve en caída libre, se sabe que está sometido a la aceleración de la gravedad $\mathbf{g}$. Por consiguiente, la fuerza que la tierra ejerce sobre dicho cuerpo, comúnmente llamada *peso*, está dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{W} = m\mathbf{g}$$

El peso es una propiedad característica de todo cuerpo, independientemente que se encuentre en reposo o en movimiento, respecto a un observador inercial, como se ilustra en la figura 2.12. Generalmente, la segunda ley de Newton se refiere al caso de una partícula sobre la que actúan varias fuerzas, siendo $\mathbf{F}$ la fuerza neta ó resultante de las fuerzas aplicadas. Si sobre la partícula actúan tres o más fuerzas, la

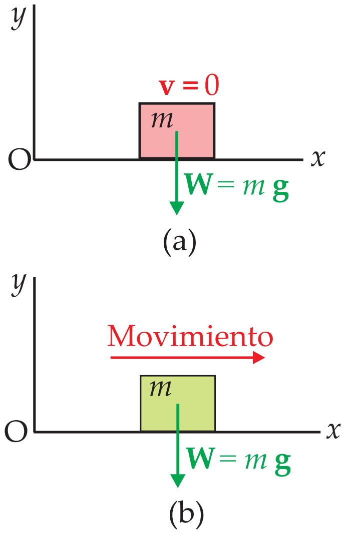


Figura 2.12: *Peso de un cuerpo: a) en reposo b) en movimiento.*

fuerza **F** es la resultante de ellas. Además, cada fuerza representa la interacción de la partícula con otra.

Así, cuando el momento lineal de una partícula, cambia con el tiempo, es porque sobre la partícula actúa una fuerza neta diferente de cero. En adelante, la interacción ó acción del medio ambiente sobre una partícula se representa matemáticamente mediante el concepto de fuerza (**F**). A la recta infinita sobre la que actúa esta o cualquier otra fuerza se le denomina l*ínea de acción de la fuerza*.

Dimensiones y unidades fuerza

De acuerdo con la definición del vector fuerza, se tiene que sus dimensiones corresponden al cociente de las dimensiones del vector momento lineal con la dimensión de tiempo, es decir $[F] = [p]\left[t^{-1}\right] = \mathrm{MLT}^{-2}$. Por ello, las unidades correspondientes son $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$ en el sistema internacional de unidades, donde se define el Newton en la forma $1\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}} \equiv 1\,\mathrm{N}$. En el sistema gaussiano la unidad es $\mathrm{g \cdot cm \cdot s^{-2}}$ donde se utiliza la definición $1\,\mathrm{g \cdot cm \cdot s^{-2}} \equiv 1\,\mathrm{dina}$. En el sistema inglés la unidad es la lb y su relación con el sistema de unidades SI está dada por $1\,\mathrm{lb} \equiv 4.448\,\mathrm{N}$.

Otra unidad que es utilizada algunas veces es el kilogramo fuerza, definido como $1\,\mathrm{kgf} \equiv 9.8\,\mathrm{N}$.

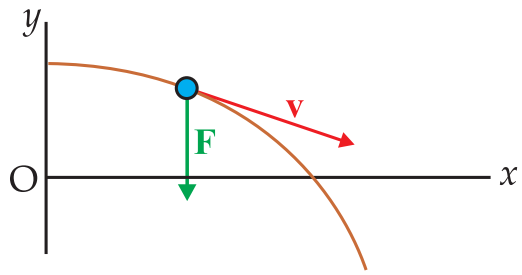
La relación entre la unidad de fuerza en el sistema SI y el sistema gaussiano está dada por $1\,\mathrm{N} \equiv 10^5$ dinas.

Ejemplo 2.3.
Las coordenadas de posición para una partícula, de masa m, están dadas por $x = 2t$ y $y = 3 - 4t^2$, donde x, y están dados en cm y t en s. a) Determine la trayectoria seguida por la partícula. b) Calcule la aceleración de la partícula. c) Halle la fuerza que actúa sobre la partícula, sabiendo que su masa es 0.3 kg.

Solución
a) Mediante las expresiones dadas para x y y, se tiene que la ecuación de la trayectoria seguida por la partícula es

$$y = 3 - x^2,$$

la cual corresponde a una trayectoria parabólica, como se ilustra en la siguiente figura.



b) Derivando x y y dos veces respecto al tiempo, se encuentra que la aceleración de la partícula es

$$\mathbf{a} = -(8\,\mathrm{cm \cdot s^{-2}})\mathbf{j}$$

c) De acuerdo con la ecuación 2.10, para masa constante, la fuerza que actúa sobre la partícula está dada por

$$\mathbf{F} = -(2.4 \times 10^3\,\mathrm{dinas})\mathbf{j}$$

Así, sobre la partícula sólo actúa una fuerza en la dirección vertical. Esto es característico de todo movimiento parabólico, es decir, mientras en una dirección la fuerza es nula, en la dirección perpendicular es diferente de cero. Además, por ser la fuerza negativa, esta apunta en sentido opuesto a la dirección positiva del eje y, por lo que la concavidad de la parábola es hacia abajo como se muestra en la figura anterior.

Ejercicio 2.2.
Las coordenadas de posición para una partícula, de masa m, están dadas por $x = 2t$ y $y = 3 - 4t^2$, donde x, y están dados en cm y t en s. Halle las dimensiones de los coeficientes numéricos, en las expresiones para x y y.

2.3.3. Fuerza neta o resultante de un sistema de fuerzas concurrentes

En la figura 2.14 se supone que sobre un cuerpo actúan varias fuerzas aplicadas a la partícula A, es decir, las fuerzas son concurrentes. Es posible reemplazar este sistema de fuerzas por una sola fuerza, llamada resultante, que produce el mismo efecto que las fuerzas concurrentes simultáneamente aplicadas.

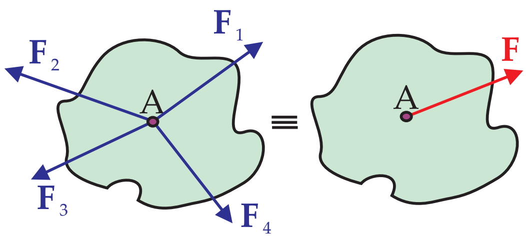


Figura 2.13: *Fuerza neta o resultante de un sistema de fuerzas.*

Esta es la operación inversa a la descomposición de fuerzas. Matemáticamente se opera de acuerdo con las reglas de la geometría vectorial ya que estas cumplen con el principio de superposición, esto es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots \\ &= \sum \mathbf{F}_i \\ &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

2.3.4. Resultante de un sistema de fuerzas utilizando componentes rectangulares

Suponiendo que sobre la partícula de la figura 2.14, actúan varias fuerzas (necesariamente concurrentes) y en el mismo plano, es decir son fuerzas coplanares, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots \\ &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \\ &= \sum \mathbf{F}_i \\ &= \sum (F_{xi}\mathbf{i} + F_{yi}\mathbf{j}) \\ &= (\sum F_{xi})\mathbf{i} + (\sum F_{yi})\mathbf{j}\end{aligned}$$

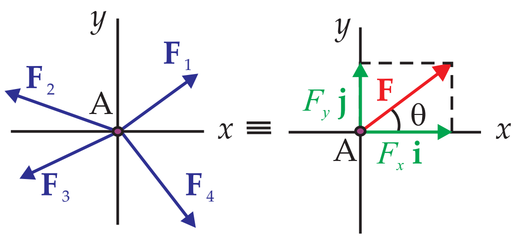


Figura 2.14: *Resultante de varias fuerzas.*

Como en general se tiene que la resultante está dada por

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$$

igualando componentes, por ser los vectores unitarios **i** y **j** linealmente independientes, se encuentra que

$$\begin{aligned}F_x &= \sum F_{xi}, \\ F_y &= \sum F_{yi}.\end{aligned}$$

Si se conocen las componentes de cada fuerza, la magnitud de la resultante se obtiene mediante la aplicación del teorema de Pitágoras

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

y para su dirección, se acostumbra emplear la definición de la función trigonométrica tangente

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$$

No sobra recordar que la resultante $\mathbf{F}$ es físicamente equivalente a las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ y$\mathbf{F}_4$ aplicadas simultáneamente.

2.3.5. Tercera ley de Newton o ley de acción-reacción

De las ecuaciones (2.7) y (2.8) se tiene que

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \tag{2.11}$$

La ecuación (2.11), es la forma matemática de expresar la tercera ley de Newton y se puede enunciar en la forma
La fuerza que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2 es igual en magnitud pero opuesta en dirección a la fuerza que la partícula 2 ejerce sobre la partícula 1.

Es costumbre decir que $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ forman un par acción-reacción.

Todo par acción-reacción, como el mostrado en la figura 2.13, cumple simultáneamente las siguientes condiciones

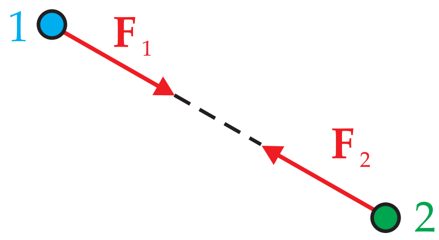


Figura 2.15: *Par acción-reación.*

1. Las dos fuerzas aparecen simultáneamente.
2. Las dos fuerzas nunca actúan sobre el mismo cuerpo sino sobre cuerpos diferentes.
3. Las dos fuerzas intervienen mientras los cuerpos interactúan.
4. Las dos fuerzas tienen la misma línea de acción.

De acuerdo con las condiciones anteriores, se puede concluir, *en el universo no existen fuerzas aisladas, sino que siempre aparecen por parejas (pares acción-reacción), o sea, un cuerpo no puede autoacelerarse.*

Ejercicio 2.3.
¿Por qué cuando un cuerpo se suelta desde una altura determinada respecto al piso, es atraído por la tierra y no se observa que la tierra sea atraída por el cuerpo, sabiendo que la magnitud de las fuerzas entre ellos es la misma?

La ley de acción y reacción se manifiesta en muchas situaciones comunes. Por ejemplo, cuando con el pié se le da a una piedra, si la fuerza que se ejerce sobre ella es la acción, entonces la reacción corresponde a la fuerza que la piedra ejerce sobre el pié y es la responsable del dolor que puede presentarse una vez que esta situación ocurre.

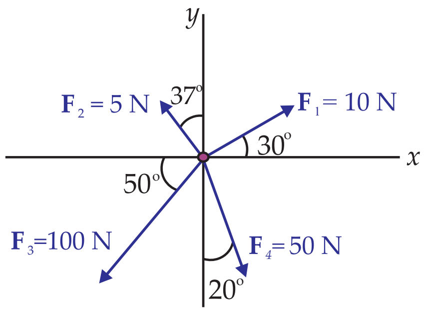
Pautas generales a seguir en la solución de situaciones físicas, relacionadas con la dinámica de una partícula

1. Tener claridad sobre la situación planteada en el enunciado, identificando las cantidades dadas y las incógnitas a obtener.
2. Si no es dado, hacer un diagrama ilustrativo de la situación física que se ha planteado, y en el cual se muestren las condiciones físicas del problema. A este diagrama se le conoce como *diagrama espacial*.
3. Elegir el cuerpo de interés y hacer un diagrama que muestre todas las fuerzas que actúen sobre él. A dicho diagrama se le conoce como *diagrama de cuerpo libre*.
4. Elegir un sistema de referencia adecuado que facilite la solución del problema, en lugar de generar complejidad.
5. De acuerdo con el sistema de referencia elegido, plantear las ecuaciones de movimiento que garanticen la situación planteada.
6. Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas encontrado, con el fin de obtener la información solicitada. De ser posible, resolverlo en forma literal, ya que esto permite hacer un análisis del resultado

y permite verificar si las dimensiones son correctas.

7. Dar los resultados numéricos, con las unidades adecuadas.

Ejemplo 2.4.
Sobre una partícula de masa 3.0 kg, actúan cuatro fuerzas como se indica en la figura. a) Calcular la fuerza neta o resultante que actúa sobre la partícula. b) Calcular la aceleración de la partícula. c) Escribir las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad, si la partícula parte del origen con velocidad inicial cero. d) Obtener la ecuación de la trayectoria seguida por la partícula.



Solución
a) La fuerza neta o resultante $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$, se puede obtener hallando sus componentes rectangulares F_x y F_y, de acuerdo con el sistema de referencia mostrado.

De este modo, la componente en x, adquiere el valor

$$\begin{aligned} F_x &= \overset{+}{\rightarrow}\sum F_{ix} \\ &= -41.53\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

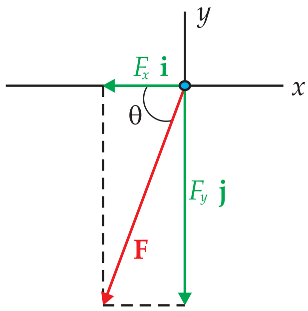
Igualmente, la componente en y, está dada por

$$\begin{aligned} F_y &= +\uparrow\sum F_{iy} \\ &= -114.6\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fuerza resultante en componentes rectangulares es:

$$\mathbf{F} = (-41.53\mathbf{i} - 114.6\mathbf{j})\mathrm{N}$$

Donde su magnitud es $F = 121.89\,\mathrm{N}$ y su dirección, mostrada en la figura siguiente, es $\theta = 70.08^o$.



$$\mathbf{F} = 121.89\ \mathrm{N}\ \measuredangle\ 70.08^\circ$$

De este modo
b) De acuerdo con la segunda ley de Newton para masa constante, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, la ecuación de movimiento para la partícula considerada, está dada por

$$(-41.53\mathbf{i} - 114.6\mathbf{j})\mathrm{N} = (3.0\,\mathrm{kg})\mathbf{a}.$$

Así, la aceleración en componentes rectangulares es

$$\mathbf{a} = (-13.83\mathbf{i} - 38.2\mathbf{j})\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2},$$

cuya magnitud es $a = 40.63\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ y dirección $\theta = 70.08^o$, como se esperaba, ya que la aceleración es paralela a la fuerza resultante. O sea

$$\mathbf{a} = 40.63\ \mathrm{ms}^{-2}\ \measuredangle\ 70.08^\circ$$

c) De acuerdo con el enunciado y el resultado anterior, las condiciones iniciales están dadas por $a_x = -13.83\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, $a_y = -38.2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, $v_{xo} = 0$, $v_{yo} = 0$ y $t_o = 0$.

Como a_x y a_y son constantes, las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad, adquieren la forma siguiente.

Componente de movimiento en x

$$x = -6.9t^2, \qquad v_x = -13.8t.$$

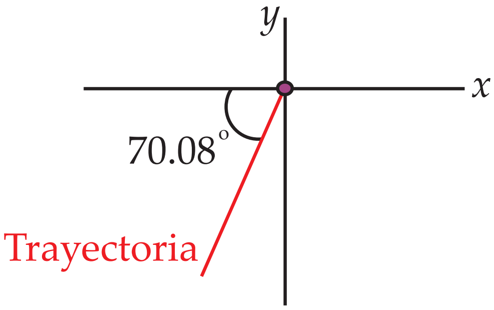
Componente de movimiento en y

$$y = -19.1t^2, \qquad v_y = -38.2t.$$

d) Mediante las expresiones para x y y , se encuentra que la ecuación de la trayectoria tiene la forma

$$y = 2.8x,$$

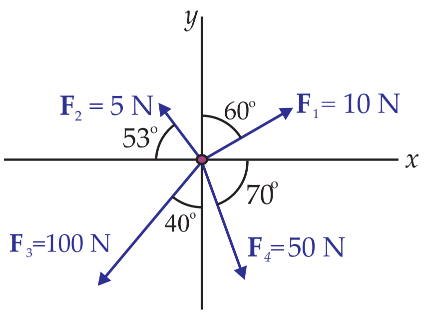
que corresponde a la ecuación de una línea recta, con pendiente 2.8 es decir, forma un



ángulo $\theta = 70.09^o$ con la horizontal, como se muestra en la siguiente figura.

Mediante este ejemplo se ha cumplido con el objetivo de la dinámica, ya que fue posible obtener la trayectoria seguida por la partícula, con sólo conocer las fuerzas que actúan sobre ella y las condiciones iniciales impuestas.

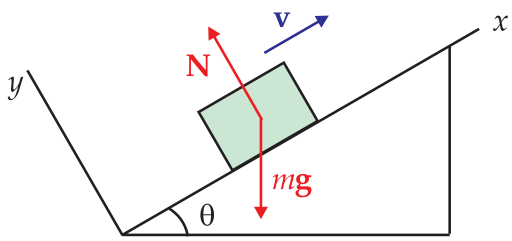
Ejercicio 2.4.
Sobre una partícula de masa 3.0 kg, actúan cuatro fuerzas como se indica en la figura siguiente. a) Calcule la fuerza adicional que es necesario aplicarle a la partícula, para que la resultante de las fuerzas sea horizontal, de magnitud 50 N y dirigida hacia la derecha. b) Calcule la aceleración correspondiente de la partícula. c) Escriba las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad, si la partícula parte del origen con una velocidad de $10.0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, dirigida verticalmente hacia arriba. d) Obtenga la ecuación de la trayectoria seguida por la partícula y trace una gráfica de ella.



Ejemplo 2.5.
Desde la base de un plano inclinado y liso, que forma un ángulo de 30° con la horizontal, se lanza un bloque de masa 500 g, con una velocidad de $15.0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. a) Haga el diagrama de cuerpo libre para el bloque. b) Determine la aceleración del bloque. c) Halle la fuerza que la superficie ejerce sobre el bloque. d) Plantee las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad, que rigen el movimiento del bloque. e) ¿Cuánto tiempo asciende el bloque por el plano inclinado? f) ¿Hasta qué altura, respecto a la base del plano inclinado, asciende el bloque?

Solución
De acuerdo con el enunciado, las cantidades dadas son $m = 500\,\mathrm{g} \equiv 0.5\,\mathrm{kg}$, $\theta = 30^o$ y $v_o = 15.0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, siendo la cantidad conocida $g = 9.8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) *Diagrama de cuerpo libre*: Sobre el bloque actúa la fuerza que ejerce la superficie sobre él, más conocida como *normal*; y la fuerza que le ejerce la tierra, conocida como *peso*.



b) La ecuación de movimiento en la dirección paralela al eje x, adquiere la forma

$$\begin{aligned} +\nearrow \sum F_{ix} &= ma_x \\ -mg\,\mathrm{sen}\theta &= ma_x. \end{aligned}$$

Como sólo hay movimiento en la dirección paralela al eje x, se tiene que la aceleración del bloque es $a = a_x$, así

$$a = -g\,\mathrm{sen}\theta,$$

cuyo valor es

$$a = -4.9\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

c) La ecuación de movimiento en la dirección paralela al eje y, adquiere la forma

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_{iy} &= 0 \\ N - mg\cos\theta &= 0, \end{aligned}$$

donde se ha tomado $a_y = 0$, ya que en esta dirección no hay movimiento; así

$$N = mg\cos\theta,$$

encontrándose el valor

$$N = 4.24\,\mathrm{N}.$$

d) De acuerdo con el sistema de referencia, el bloque se mueve sobre el eje x con una aceleración de $-4.9\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. De este modo, las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad, están dadas por

$$x = 15t - 2.45t^2 \qquad y \qquad v = 15 - 4.9t$$

e) Como el bloque tiene un movimiento rectilíneo uniformemente retardado, llega un momento en el cual su velocidad se hace cero. De este nodo, mediante la ecuación cinemática de velocidad, se encuentra que en ese instante

$$t = 3.06\,\mathrm{s}.$$

f) Reemplazando $t = 3.06\,\mathrm{s}$ en la ecuación cinemática de posición, se encuentra que el máximo desplazamiento sobre el plano inclinado es $x_{\text{máx}} = 22.96\,\mathrm{m}$, así, mediante la figura anterior se encuentra que la altura máxima alcanzada por el cuerpo es

$$h = 11.48\,\mathrm{m}.$$

Ejercicio 2.5.
Un bloque, de masa 500 g, parte del reposo y se mueve sobre un plano inclinado liso que forma un ángulo de 30º con la horizontal. El bloque inicia su movimiento desde una altura de 9.0 m respecto a la base de plano inclinado. a) Haga el diagrama de cuerpo libre para el bloque. b) Determine la aceleración del bloque. c) Plantee las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad, que rigen el movimiento del bloque. d) ¿Cuánto tiempo tarda el bloque en llegar a la base del plano inclinado? e) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando llega a la base del plano inclinado?

2.3.6. Equilibrio de una partícula

Una situación particular se presenta, cuando la fuerza neta o resultante es nula, es decir, $\mathbf{F} = 0$; en este caso, las fuerzas simultáneamente aplicadas no tienen ningún efecto de traslación sobre la partícula. Esto significa que los efectos de las fuerzas simultáneamente aplicadas se anulan entre sí. Cuando lo anterior ocurre, se dice que la partícula está en equilibrio, esto es *si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula se encuentra en equilibrio*. Es decir, que por la ecuación (2.8) la derivada del momento lineal con respecto al tiempo es cero, por lo que $\mathbf{p} =$ Constante, y la partícula se encuentra en equilibrio estático si permanece en reposo, o en equilibrio dinámico si permanece en movimiento. Esta situación indica que la ley de inercia es un caso particular de la segunda ley de Newton.

Matemáticamente, el equilibrio de una partícula se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum \mathbf{F}_i \\ &= 0\end{aligned}$$

o en componentes rectangulares

$$\left(\sum F_{ix}\right)\mathbf{i} + \left(\sum F_{iy}\right)\mathbf{j} + \left(\sum F_{iz}\right)\mathbf{k} = 0$$

Como los vectores unitarios **i**, **j** y **k** son linealmente independientes, las condiciones que se deben satisfacer, para que la partícula esté en equilibrio, son

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0, \\ \sum F_{iz} &= 0.\end{aligned}$$

Cuando las fuerzas actúan, por ejemplo en el plano xy , se dice que son coplanares y las condiciones de equilibrio están dadas por

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0.\end{aligned}$$

Pautas a seguir en situaciones relacionadas con el equilibrio de una partícula.

1. Tener claridad sobre la situación planteada en el enunciado, identificando las cantidades dadas y las incógnitas a obtener.

2. Hacer un diagrama ilustrativo de la situación física que se ha planteado y en el cual se muestren las condiciones físicas del problema. A este diagrama se le conoce como *diagrama espacial*.

3. Elegir la partícula de interés y hacer un diagrama que muestre a esta y a todas las fuerzas que actúen sobre ella. A dicho diagrama se le conoce como *diagrama de cuerpo libre* (DCL).

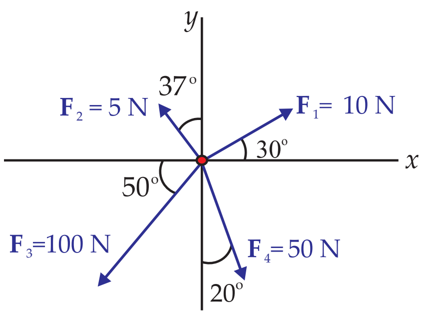
4. Elegir un sistema de coordenadas adecuado, es decir, un sistema que facilite la solución del problema, en lugar de generar complejidad.

5. De acuerdo con el sistema de referencia elegido, plantear las ecuaciones que garanticen la situación de equilibrio que se desea analizar.

6. Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas encontrado para obtener los resultados pedidos; de ser posible, hacerlo en forma literal, con el fin comprobar que las dimensiones sean correctas y además, para poder hacer un análisis cualitativo de los resultados.

7. Finalmente, dar los resultados numéricos con las unidades adecuadas.

Ejemplo 2.6.
Sobre una partícula de masa 3.0 kg, actúan cuatro fuerzas como se indica en la figura siguiente. Hallar la fuerza que es necesario aplicar a la partícula, con el fin de mantenerla en equilibrio. Comparar el resultado, con el obtenido en el numeral a) del ejemplo 2.4.



Solución
Para que la partícula permanezca en equilibrio, es necesario aplicar una fuerza $\mathbf{F}_5$, tal que cumpla la relación

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 = 0,$$

o en componentes rectangulares

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0; \qquad -41.53\,\mathrm{N} + F_{5x} = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad -114.6\,\mathrm{N} + F_{5y} = 0 \qquad (2)$$

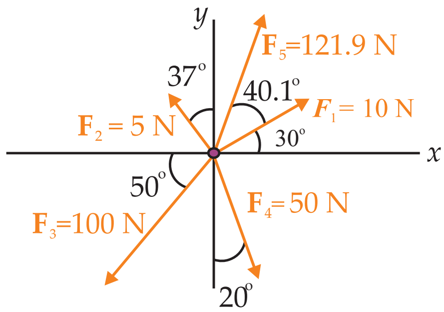
Mediante las ecuaciones (1) y (2), se tiene que la fuerza adicional que garantiza el equilibrio, en componentes rectangulares, está dada por

$$\mathbf{F}_5 = (41.53\mathbf{i} + 114.6\mathbf{j})\mathrm{N}$$

donde la magnitud y dirección están dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{F}_5 = 121.89\ \mathrm{N}\ \measuredangle 70.08^{\circ}$$

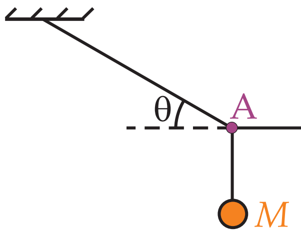
como se ilustra en la figura.



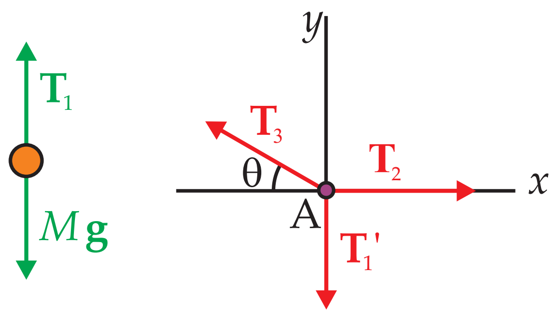
Al comparar estos valores con los obtenidos en el numeral a) del ejemplo 2.4, se encuentra que la fuerza adicional $\mathbf{F}_5$ tiene la misma magnitud pero sentido opuesto a la fuerza neta o resultante. Este resultado es de esperarse, ya que la fuerza a aplicar debe anular los efectos de la fuerza resultante, pues de lo contrario, no es posible garantizar el equilibrio. A la fuerza $\mathbf{F}_5$, en este caso, se le denomina *fuerza equilibrante*.

Ejemplo 2.7.
Un cuerpo de masa M, se suspende mediante tres cuerdas como se indica en la figura. a) Hacer los diagramas de cuerpo libre que permitan analizar el estado

de la masa M. b) Plantear las ecuaciones que garantizan la posición del cuerpo en la figura. c) Determinar en función de M, θ y g, las tensiones en cada una de las cuerdas. d) Calcular la tensión en cada una de las cuerdas, sabiendo que $M = 2.3\,\text{kg}$ y $\theta = 37^{\text{o}}$.



Solución
a) Diagrama de cuerpo libre para M y para el punto donde se unen las tres cuerdas



b) Ecuaciones de equilibrio
Para M:

$$+\downarrow \sum F_{iy} = 0; \qquad Mg - T_1 = 0. \qquad (1)$$

Para el punto A

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_{ix} = 0; \qquad T_2 - T_3\cos\theta = 0, \qquad (2)$$

$$+\uparrow \sum F_{iy} = 0; \qquad T_3\text{sen}\theta - T_1 = 0. \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3), se encuentra que las tensiones en las cuerdas están dadas por

$$\begin{aligned} T_1 &= Mg \\ T_2 &= Mg\cot\theta \\ T_3 &= Mg\csc\theta. \end{aligned}$$

d) Remplazando los valores dados, en las expresiones anteriores, se llega a

$$\begin{aligned} T_1 &= 22.5\,\text{N} \\ T_2 &= 29.9\,\text{N} \\ T_3 &= 37.4\,\text{N}. \end{aligned}$$

Al comparar estos valores, se tiene que la magnitud de las tensiones puede ser mayor que la magnitud del peso, pues en este caso $T_1 < T_2 < T_3$.

Ejercicio 2.6.
Desde la base de un plano inclinado y liso, que forma un ángulo de 30^{o} con la horizontal, se lanza un bloque de masa $500\,\text{g}$, con una velocidad de $15.0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Hallar la fuerza adicional que se le debe aplicar al bloque, si se desea que ascienda por el plano inclinado con velocidad constante.

2.4. Fuerza de fricción entre superficies en contacto

Es práctica común, la situación que se representa en la figura 2.16, cuando se lanza un cuerpo de masa m sobre una superficie horizontal rugosa, con velocidad inicial v_o. Como resultado, se tiene que en un tiempo t posterior el cuerpo se detiene. Cinemáticamente, lo anterior indica que mientras el cuerpo desliza experimenta una aceleración que se opone al movimiento, ya que la magnitud de la velocidad disminuye hasta el valor cero.

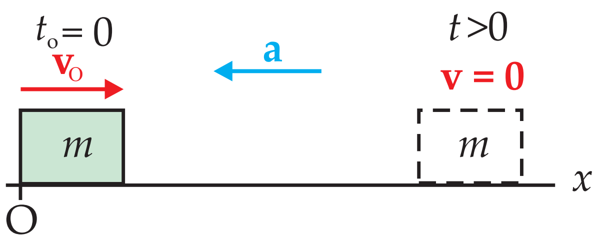


Figura 2.16: *Movimiento desacelerado debido a la fricción.*

Ahora, de acuerdo con la segunda ley de Newton, esto indica que la superficie ejerce sobre el bloque una fuerza en sentido opuesto al movimiento; a esta fuerza se le conoce como *fuerza de fricción o de rozamiento* por deslizamiento, también denominado *rozamiento seco* ya que se supone que las superficies en contacto no están lubricadas. Igualmente, por la tercera ley de Newton, la superficie del cuerpo también ejerce una fuerza de rozamiento sobre la superficie en la cual se mueve, y es igual en magnitud pero con sentido opuesto.

La fuerza que actúa sobre el bloque, se opone al movimiento de traslación y nunca lo ayuda como se ilustra en la figura 2.17. En la vida diaria, sin estas fuerzas no sería posible: caminar, sostener un lápiz en la mano, el transporte con ruedas, es decir, es una fuerza indispensable aunque en muchos casos es necesario evitarla al máximo, por ejemplo en las máquinas industriales, donde es necesario lubricar sus superficies para evitar el desgaste.

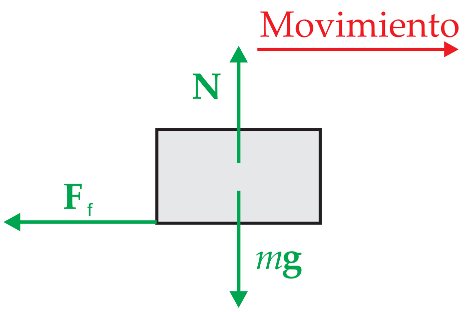


Figura 2.17: *Fuerza de fricción, opuesta al movimiento.*

En lo que sigue, no se considera la fuerza resistiva o de fricción que sobre el cuerpo presenta el medio (aire, agua, etc.) mientras existe movimiento.

Para obtener la ley de rozamiento seco, es decir, sobre superficies no lubricadas, se considera un bloque inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Como se indica en la figura 2.18, si no se le aplica una fuerza externa que tenga una componente paralela a la horizontal, la superficie no presenta fricción. Ahora, se encuentra que el bloque no se mueve respecto a la superficie, cuando se le aplica una fuerza pequeña, o sea, que esta fuerza es contrarrestada por la fuerza de fricción opuesta a la aplicada y que es ejercida por el piso. Al ir aumentando lentamente la fuerza aplicada, se llega a un cierto valor límite para el cual el movimiento del bloque es inminente, es decir, a partir de este valor de la fuerza externa **F**, el cuerpo pasa del estado de reposo al estado de movimiento.

Además, si se aumenta aún más la fuerza

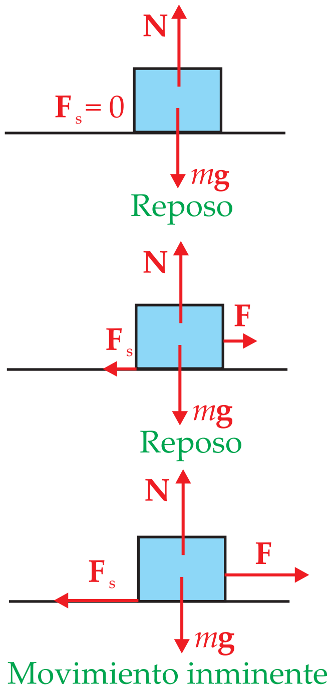


Figura 2.18: *La fuerza de fricción estática aumenta hasta un máximo.*

externa, como se indica en la figura 2.19, ya el cuerpo se mueve respecto a la superficie, la fuerza de fricción se reduce un poco y el movimiento es acelerado. Si luego de estar el cuerpo en movimiento, se reduce la fuerza externa, es posible obtener movimiento rectilíneo uniforme, esto es, la fuerza aplicada es compensada por la fuerza de rozamiento y la fuerza neta es nula ($F_K = F$).

En la figura 2.20, se muestra la forma como varía la fuerza de fricción F_f con la fuerza externa aplicada F, desde que no se le aplica fuerza externa hasta que el cuerpo adquiere movimiento. Se observa que mientras la fuerza de fricción es prácticamente constante, una vez que el cuerpo adquiere movimiento, varía desde cero hasta un valor máximo, mientras el cuerpo permanece en reposo; en este rango es válida la condición $F_s = F$ ó $\theta = 45^o$.

La fuerza de fricción que obra entre superficies que se encuentran en reposo una respecto a la otra, se llama *fuerza de rozamiento estático*, F_s, encontrándose experimentalmente que

$$F_s \leq \mu_s N. \tag{2.12}$$

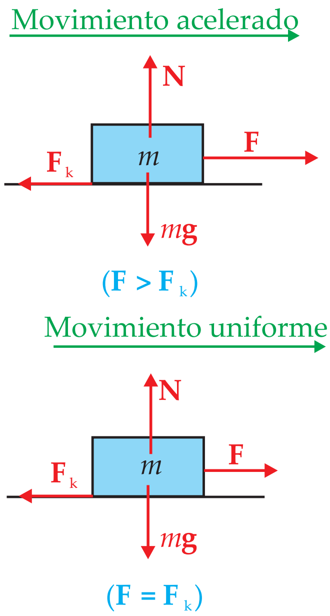


Figura 2.19: *La fuerza de fricción dinámica es prácticamente constante.*

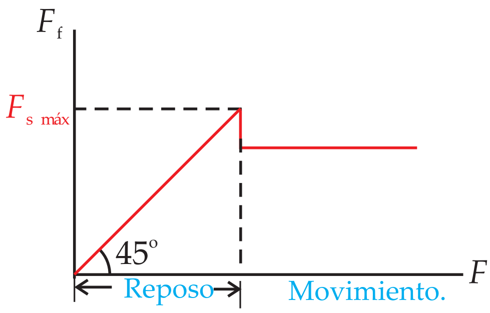


Figura 2.20: *Variación de la fuerza de fricción con la fuerza aplicada.*

La fuerza de fricción estática máxima, se obtiene cuando

$$F_{s,máx} = \mu_s N, \tag{2.13}$$

y corresponde a la mínima fuerza necesaria para que se inicie el movimiento de una superficie respecto a la otra.

En las ecuaciones (2.12) y (2.13) μ_s es el *coeficiente de rozamiento estático* y N es la magnitud de la normal.

Por otro lado, la fuerza de rozamiento que obra entre superficies en movimiento relativo, se llama *fuerza de rozamiento cinético o dinámico*, F_k, y experimentalmente se encuentra que

$$F_k = \mu_k N, \tag{2.14}$$

con μ_K *coeficiente de rozamiento cinético o dinámico*.

El experimento también muestra que la fuerza de fricción es independiente tanto del área de contacto como de la velocidad.

De acuerdo con las expresiones (2.12) y (2.14), los valores de los coeficientes de fricción dependen de la naturaleza de las dos superficies en contacto, es decir, son una propiedad de relación entre superficies. Las ecuaciones (2.13) y (2.14), indican que la relación entre los coeficientes de fricción estático y cinético es de la forma

$$\mu_s > \mu_k,$$

ya que en ambos casos N es la magnitud de la normal.

En la tabla 2.1, se muestran los coeficientes de fricción estático y dinámico para algunas superficies. Se observa que estos coeficientes dependen del material de las superficies que se encuentren en contacto, por ello se dice que son una propiedad de relación entre superficies. Igualmente, se aprecia que el coeficiente de fricción estático es mayor que el coeficiente de fricción dinámico, como se encontró anteriormente.

Tabla 2.1 Coeficientes de fricción

Superficies	μ_s	μ_k
Acero - acero	0.74	0.57
Aluminio - acero	0.61	0.47
Cobre - acero	0.53	0.36
Madera - madera	0.25 – 0.50	0.20
Vidrio - vidrio	0.94	0.40
Metal - metal (lubricado)	0.15	0.06
Hielo - hielo	0.10	0.03
Caucho - concreto seco	1.20	0.85
Caucho - concreto húmedo	0.80	0.60

¿Es el rozamiento un mal necesario? En la vida cotidiana la fuerza de fricción se manifiesta de formas diversas; si no se presentara, muchos fenómenos comunes ocurrirían de manera diferente.

En un día lluvioso, cuando se camina sobre superficies poco ásperas, por ejemplo sobre piso vitrificado, muchas veces cuesta trabajo evitar las caídas; hasta movimientos cómicos, se deben hacer para evitarlas. Esto permite reconocer que, comúnmente, las superficies por las que se camina poseen una propiedad importante, la fricción, gracias a la cual se puede conservar el equilibrio sin mucho esfuerzo. Situaciones similares a las anteriores se presentan, cuando se viaja en bicicleta sobre asfalto mojado ó cuando un auto frena sobre piso pantanoso. De esta forma se hace necesario que la superficie presente fricción para evitar los accidentes y congestiones ya que el rozamiento permite explicar en parte por qué en días lluviosos el tráfico es bastante complicado en las grandes ciudades.

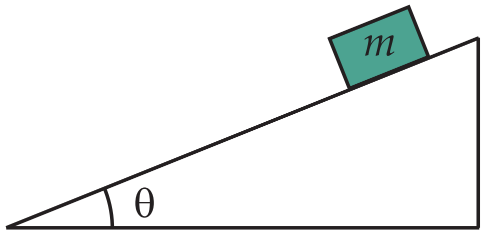
Aunque en los casos anteriores es indispensable la fuerza de fricción, en otras situaciones no lo es, como en las máquinas industriales donde los ingenieros procuran evitarla al máximo, para prevenir un desgaste rápido de las piezas.

O sea que aunque en algunos casos, la fricción no es deseable, en la mayoría de situaciones es indispensable, ya que da la posibilidad de caminar, de estar sentados, de trabajar y estudiar sin el temor que los libros o que el escritorio resbale, o que el lápiz se escurra entre los dedos.

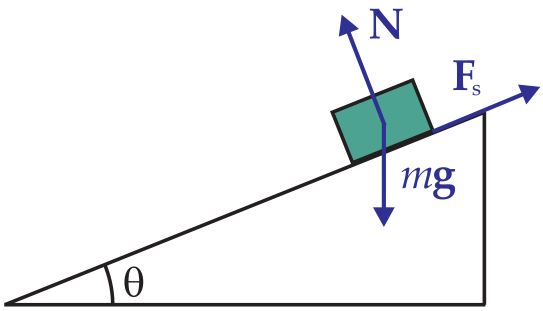
Si el rozamiento no existiera, los cuerpos con el tamaño de una gran piedra, o un pequeño grano de arena, es decir, independiente de sus dimensiones, no podrían apoyarse unos sobre otros, todos empezarían a resbalar; de igual manera la tierra sería una esfera sin rugosidades, igual que una gota de agua. Similarmente, sin fricción, los clavos y tornillos se saldrían de las paredes, no sería posible sujetar cuerpos con las manos.

En síntesis la fricción es un fenómeno necesario en la mayoría de las actividades diarias del hombre, aunque en algunos casos es un mal que se debe evitar al máximo.

Ejemplo 2.8.
Un bloque de masa m, se encuentra en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la figura. a) Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es μ, determine el ángulo θ a partir del cual el cuerpo inicia su movimiento. b) Si $\mu = 0.1,\ 0.3,\ 0.5$ y 0.6, hallar los valores correspondientes de θ.



Solución
Diagrama de cuerpo libre para el bloque, donde $\mathbf{F}_s$ es la fuerza de fricción estática puesto que el bloque está en reposo.



Ecuaciones que garantizan el estado de reposo para el bloque

$$+\nearrow \sum F_x = 0; \quad F_s - mg\,\text{sen}\theta = 0 \quad (1)$$

$$\nwarrow + \sum F_y = 0; \quad N - mg\cos\theta = 0, \quad (2)$$

$$F_s \leq \mu_s N. \quad (3)$$

a) De la ecuación (1) se tiene que la fuerza de fricción está dada por

$$F_s = mg\,\text{sen}\theta, \quad (4)$$

o sea que el ángulo θ, para el cual el movimiento del bloque es inminente, se obtiene si esta fuerza de fricción se hace máxima. Ahora de la ecuación (3), esta condición se satisface cuando

$$F_{s,\text{máx}} = \mu_s N_{\text{mín}}. \quad (5)$$

De este modo, mediante las ecuaciones (2), (4) y (5), se llega a la expresión

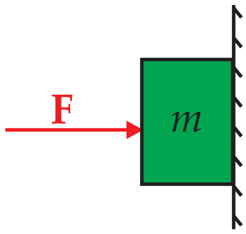
$$\theta_{\text{máx}} = \tan^{-1}\mu_s. \quad (6)$$

b) Mediante la ecuación (6) se obtienen los valores de $\theta_{\text{máx}}$, mostrados en la siguiente tabla para los diferentes valores de μ.

μ_s	0.1	0.3	0.5	0.6
$\theta_{\text{máx}}(^{\text{o}})$	5.7	16.7	26.6	31

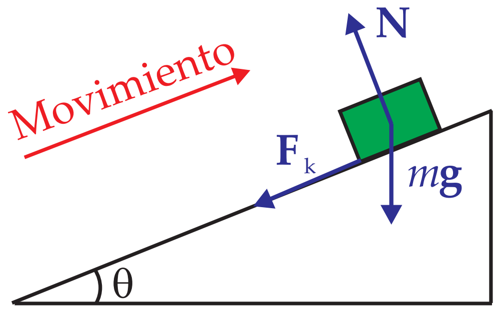
Al comparar los valores de μ_s y $\theta_{\text{máx}}$, se puede concluir que a mayor valor de μ_s mayor es el ángulo a partir del cual el movimiento del bloque es inminente.

Ejercicio 2.7.
Un bloque, de masa m, se sostiene sobre una pared vertical mediante una fuerza horizontal $\mathbf{F}$, como se indica en la figura. El coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es μ_s. a) Haga el diagrama de cuerpo libre para bloque. b) Plantee las ecuaciones que garantizan el estado del bloque. c) De los términos que aparecen en la ecuación (2.12), ¿cuáles son constantes en este caso? d) Determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$, cuando el movimiento del bloque es inminente. ¿Cómo es la magnitud de la fuerza obtenida?



Ejemplo 2.9.
Desde la base de un plano inclinado, que forma un ángulo de 30° con la horizontal, se lanza un bloque de masa 500 g, con una velocidad de $15.0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. El coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es 0.2. a) Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre el bloque. b) Determine la aceleración del bloque. c) Halle la fuerza que la superficie ejerce sobre el bloque. d) Plantee las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad, que rigen el movimiento del bloque. e) Encuentre el tiempo durante el cual asciende el bloque por el plano inclinado. f) Obtenga, respecto a la base del plano inclinado, la altura máxima alcanzada por el bloque.

Solución
De acuerdo con el enunciado, las cantidades dadas son $\theta = 30^{\text{o}}$, $m = 500\,\text{g} \equiv 0.5\,\text{kg}$,, $\mu = 0.2$, $v_o = 15.0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ y la cantidad conocida $g = 9.8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.
a) Diagrama de cuerpo libre para el bloque, donde $\mathbf{F}_\text{k}$ es la fuerza de fricción dinámica ya que el bloque se encuentra en movimiento.



b) Ecuaciones de movimiento para el bloque.

$$+\nearrow \sum F_\text{x} = ma; \quad -mg\,\text{sen}\theta - F_\text{k} = ma. \qquad (1)$$

$$\nwarrow + \sum F_\text{y} = 0; \qquad N - mg\cos\theta = 0. \qquad (2)$$

Donde

$$F_\text{k} = \mu N. \qquad (3)$$

Mediante las ecuaciones (1), (2) y (3), se encuentra que la aceleración está dada por

$$a = -g\,(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta),$$

donde al reemplazar los valores correspondientes se obtiene

$$a = -6.6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2},$$

que es un valor mayor al obtenido en el ejemplo 2.5 y menor que la aceleración de la gravedad como se esperaba.
c) Por la ecuación (2), se tiene que la fuerza normal es igual a la obtenida en el ejemplo 2.5, esto es

$$N = mg\cos\theta.$$

d) De acuerdo con el sistema de referencia elegido, el bloque asciende paralelamente al eje x con una aceleración de $-6.6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Así las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad son

$$x = 15t - 3.3t^2, \qquad y \qquad v = 15 - 6.6t.$$

e) Como el bloque asciende con movimiento rectilíneo uniformemente retardado, llega un momento en el cual su velocidad se hace cero. Mediante la ecuación cinemática de velocidad, en dicho instante $t = 2.27\,\text{s}$, que es un tiempo menor que el encontrado en el ejemplo 2.5.
f) Reemplazando $t = 2.27\,\text{s}$ en la ecuación cinemática de posición, se encuentra que el máximo desplazamiento sobre el plano inclinado es $x_{\text{máx}} = 17.05\,\text{m}$. Así, de la figura anterior se encuentra que la altura máxima alcanzada por el bloque es 8.53 m,correspondiendo a un valor menor que el obtenido en el ejemplo 2.5.

Ejercicio 2.8.
Desde la base de un plano inclinado, que forma un ángulo de 30º con la horizontal, se lanza un bloque de masa 0.5 kg, con una velocidad de $15.0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. El coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es 0.15. a) Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre el bloque. b) Determine la aceleración del bloque. c) Halle la fuerza que la superficie ejerce sobre el bloque. d) Plantee las ecuaciones cinemáticas de posición y velocidad, que rigen el movimiento del bloque. e) ¿Cuánto tiempo asciende el bloque por el plano inclinado? f) ¿Hasta qué altura, respecto a la base del plano inclinado, asciende el bloque? Compare los resultados con los obtenidos en los ejemplos 2.5 y 2.9.

2.5. Fuerza de fricción en fluidos

Los fluidos presentan dos tipos de fuerza como son el empuje y la fuerza resistiva o de fricción que actúan sobre los cuerpos que se mueven en su interior. En esta sección sólo se analiza el efecto de la fuerza resistiva que presentan los fluidos a los cuerpos en movimiento. Cuando un cuerpo se mueve en un fluido (líquido o gas) y las velocidades no son muy grandes, aproximadamente se puede obtener que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad pero con sentido opuesto, es decir

$$\mathbf{F}_\text{f} = -K\eta\mathbf{v}, \qquad (2.15)$$

donde K es el *coeficiente de fricción* que depende de la forma del cuerpo. En el caso de un cuerpo esférico de radio R, este coeficiente de fricción tiene la forma

$$K = 6\pi R,$$

expresión conocida como ley de Stokes.

η es el *coeficiente de viscosidad* que depende de la fricción entre las diferentes capas del fluido, que se mueven a velocidades diferentes. A la fuerza de fricción entre las capas del fluido se le llama *viscosidad*, propiedad que con un aumento de temperatura disminuye en los líquidos y aumenta en los gases.

En la tabla 2.2 se dan los valores de viscosidad para algunos fluidos. Se observa que el valor de la viscosidad depende de la temperatura a la cual se encuentre el fluido.

Tabla 2.2. *Coeficientes de viscosidad*.

Líquido	η(cP)
Agua (0ºC)	1.792
Agua (20ºC)	1.005
Agua (40ºC)	0.656
Aceite de castor (20ºC)	9.860
Glicerina (20ºC)	833.0
Mercurio (20ºC)	1.550
Gas	$\eta(\mu$P)
Aire (0ºC)	171
Aire (20ºC)	181
Aire (40ºC)	190
Hidrógeno (20ºC)	93.0
Amoníaco (20ºC)	97.0
Bióxido de carbono (20ºC)	146

Dimensiones y unidades de η
De acuerdo con la ecuación (2.15) el coeficiente de viscosidad tiene dimensiones $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$. Así, las unidades en el sistema SI son $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, y en el sistema gaussiano $\text{g}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$. Se acostumbra definir $1\,\text{Poise(P)} \equiv 1\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, o sea que $1\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1} \equiv 10\,\text{P}$. Igualmente se

emplea el centipoise ($1\,\text{cP} \equiv 10^{-2}\,\text{P}$) y el micropoise ($1\,\mu\text{P} \equiv 10^{-6}\,\text{P}$).

El caso analizado anteriormente corresponde a un ejemplo de fuerza variable, ya que depende de la velocidad del cuerpo.

Ejemplo 2.10.
Un cuerpo de masa m se mueve verticalmente a través de un fluido viscoso, sometido a la acción de la fuerza gravitacional. a) Haga el diagrama de cuerpo libre para el cuerpo, b) Plantee la ecuación de movimiento para el cuerpo, c) Determine la velocidad máxima alcanzada por el cuerpo.

Solución
(a) Diagrama de cuerpo libre para el cuerpo

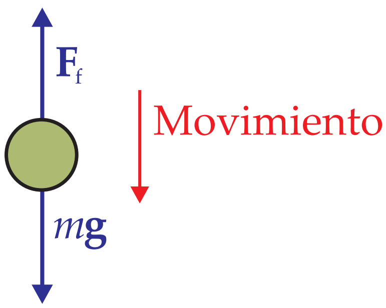


Figura 2.21: *Cuerpo que cae en un fluido viscoso.*

(b) Ecuación de movimiento

En este caso, de acuerdo con la figura (2.21) la segunda ley de Newton o ecuación de movimiento toma la forma

$$\begin{aligned} +\downarrow \sum F_\text{y} &= ma \\ m\mathbf{g} - K\eta v &= ma. \end{aligned}$$

(c) Cuando la altura respecto a la tierra no es muy grande, el peso es prácticamente constante y la aceleración produce un aumento continuo en la velocidad, así, el valor de la cantidad $K\eta v$ aumenta progresivamente, por lo que el valor de $mg - K\eta v$ disminuye continuamente hasta que se puede hacer cero, lo que lleva a que la aceleración sea cero. De acuerdo con la ley de inercia, cuando esto ocurre, la partícula continúa moviéndose en la dirección de $m\mathbf{g}$ con una velocidad constante, llamada *velocidad límite* o *terminal*, dada por

$$mg - K\eta v_\text{L} = 0, \qquad v_\text{L} = \frac{m}{K\eta}g. \quad (2.16)$$

Si se trata de un cuerpo esférico de radio R y densidad ρ, la ecuación (2.16), en forma vectorial, adquiere la forma

$$\mathbf{v}_\text{L} = \frac{2\rho R^2}{9\eta}\mathbf{g}. \quad (2.17)$$

De la ecuación (2.17) se puede concluir que la velocidad límite depende del material que está hecho el cuerpo (ρ), depende de la forma y tamaño del cuerpo (R^2) además de depender del fluido en el cual el cuerpo se mueve (η), en otras palabras, la velocidad depende de las propiedades físicas del sistema.

2.6. Fuerza elástica de un resorte

Si como se muestra en la figura 2.22, se estira un resorte a partir del punto O, de modo que su extremo se mueva hasta una posición x, la experiencia muestra que el resorte ejerce una fuerza sobre el bloque al que está sujeto y cuyo valor, con buena aproximación está dado por

$$F_\text{e} = -kx,$$

donde k es una constante llamada *constante elástica del resorte*, cuyo valor depende de la forma del resorte, de la longitud del resorte y del material que esté hecho el resorte. Esta es la ley de fuerza para resortes reales y se conoce como la *ley de Hooke*, que se satisface si el resorte no se estira más allá de cierto límite. El sentido de la fuerza siempre se opone al sentido en que se deformó el resorte, respecto al origen. Para el sistema de referencia de la figura 2.22, cuando se estira el resorte, $x > 0$ y F es negativo; cuando se comprime $x < 0$ y F es positiva. Esto lleva a que la fuerza ejercida por el resorte sea una *fuerza restauradora* en el sentido de que siempre está dirigida hacia el origen, es decir, tiende siempre a llevar el cuerpo a la posición de no estiramiento. En la ley de Hooke se puede considerar que k es la magnitud de la fuerza por unidad de deformación; así, los resortes muy duros tienen valores grandes de k. Este es otro caso de fuerza variable, ya que depende de la deformación del resorte.

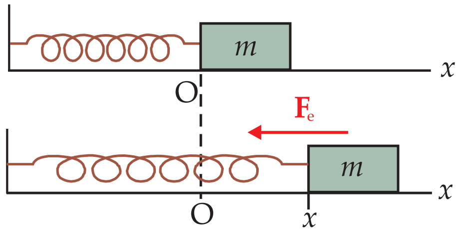


Figura 2.22: *Fuerza elástica de un resorte.*

Si el cuerpo se suelta, desde la posición x de la figura 2.22, por la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} \overset{+}{\rightarrow} \sum F_x &= ma \\ -F_e &= ma \end{aligned}$$

con $F_e = kx$ se tiene

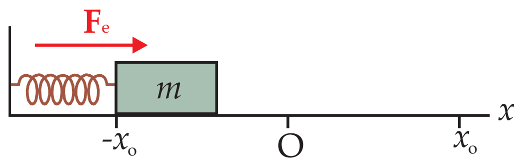
$$ma = -kx,$$

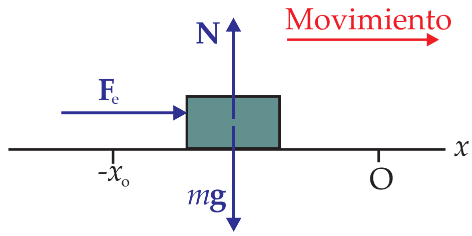
así que

$$a = -\left(k/m\right)x,$$

de este modo, la aceleración es variable y opuesta a la deformación del resorte. Este resultado es característico de un movimiento periódico muy común en la naturaleza, tal como el movimiento de los átomos alrededor de la posición de equilibrio en el caso de un sólido cristalino, denominado *Movimiento Armónico Simple* (MAS). Este tema será tratado con todo detalle en la primera unidad del curso de Física II.

Ejemplo 2.11.
Como se indica en la figura, mediante un bloque de masa m se comprime un resorte de constante k y luego se suelta. Suponga que el bloque está adherido al resorte.a) Haga el diagrama de cuerpo libre para el bloque. b) Plantee las ecuaciones que rigen el movimiento del bloque. c) Determine la aceleración del bloque y halle las posiciones en las cuales ésta adquiere la máxima y mínima magnitud. d) Determine la velocidad de la partícula, respecto a la posición x, y halle las posiciones donde su magnitud adquiere los valores máximo y mínimo. e) Determine, en función del tiempo, la posición de la partícula y analice dicha solución
Solución
a) Diagrama de cuerpo libre para el bloque





b) Ecuaciones de movimiento para el bloque

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_{ix} = ma; \qquad -kx = ma, \qquad (1)$$

$$+\uparrow \sum F_{iy} = 0, \qquad N - mg = 0. \qquad (2)$$

El signo menos en la ecuación (1) se justifica, teniendo en cuenta que mientras el bloque se encuentra a la izquierda de O, x es negativo y la fuerza elástica es positiva.
c) De la ecuación (1) se encuentra que la aceleración está dada por

$$a = -\frac{k}{m}x, \qquad (3)$$

donde el sentido de la deformación es opuesto a la aceleración del bloque.
De la ecuación (3) se concluye
- La aceleración es máxima cuando x es máxima, es decir, cuando $x = \pm x_o$ ya que como no hay fricción, el máximo desplazamiento corresponde a la deformación inicial que sufre el resorte, y se obtiene en los extremos de la trayectoria.
- La aceleración es mínima en magnitud, cuando la deformación del resorte es nula, es decir, en $x = 0$, que corresponde a la posición donde la fuerza elástica es cero, o sea cuando el bloque pasa la posición de equilibrio.
d) Mediante la ecuación (3) y utilizando la definición de aceleración, por integración se encuentra que la velocidad del bloque es

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(-x^2 + x_o^2)}. \qquad (4)$$

La ecuación (4) permite concluir

- La velocidad se hace máxima cuando $x_o^2 - x^2$ es máxima, o sea cuando $x = 0$ que corresponde a la posición de equilibrio.

- La velocidad se hace cero cuando $x_o^2 - x^2 = 0$, así $x = \pm x_o$ que coincide con los extremos de la trayectoria.

e) Con ayuda de la ecuación (4) y empleando la definición de velocidad, por integración se encuentra que la posición de la partícula en función del tiempo, está dada por

$$x = x_o \cos(\omega t), \qquad (5)$$

donde se define $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ como la frecuencia angular de oscilación.

La ecuación (5) indica que la posición de la partícula depende periódicamente del tiempo, esto es, el bloque tiene un movimiento que se repite continuamente, entre las posiciones extremas $x = \pm x_o$, siempre y cuando se puedan despreciar los efectos debidos a la fricción.

En síntesis, en los puntos de la trayectoria donde la aceleración se hace máxima, la velocidad adquiere su mínimo valor y donde la aceleración se hace mínima la velocidad se hace máxima.

2.7. Dinámica del movimiento curvilíneo

En esta unidad y hasta este momento, se han considerado movimientos rectilíneos en los que la fuerza neta **F** y la velocidad **v** tienen igual dirección, como se indica en la figura 2.23.

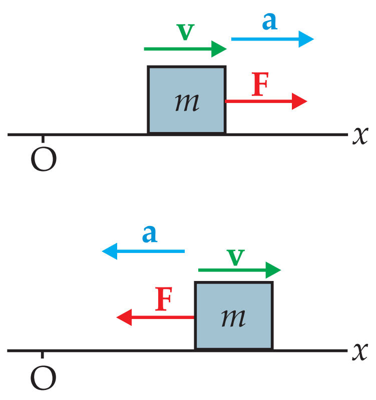


Figura 2.23: **F** *y* **v** *en el movimiento rectilíneo.*

Si **F** y **v** forman un ángulo diferente a 0º y 180º, es decir, **v** y **a** forman un ángulo diferente a 0º y 180º, la partícula describe una trayectoria curvilínea, donde la aceleración a_N se debe al cambio en la dirección de la velocidad y a_T al cambio en la magnitud de la velocidad, como se analizó en la unidad de Cinemática de una partcula.

Para una masa m, constante, la segunda ley de Newton, en este caso, tiene la forma

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \qquad (2.18)$$

De acuerdo con la ecuación (2.18), la fuerza y la aceleración son paralelas, por ello, la fuerza también debe tener componentes tangencial y normal igual que la aceleración, como se indica en la figura 2.24.

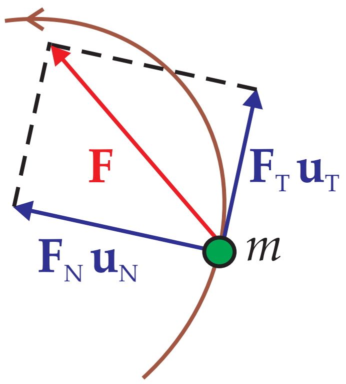


Figura 2.24: *Componentes tangencial y normal de una fuerza.*

Sabiendo que la aceleración se puede expresar en la forma

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\mathrm{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{u}_\mathrm{N},$$

la ecuación (2.18) se transforma en

$$\mathbf{F} = m\left(a_\mathrm{T}\mathbf{u}_\mathrm{T} + a_\mathrm{N}\mathbf{u}_\mathrm{N}\right). \qquad (2.19)$$

De este modo, se tiene que

$$F_\mathrm{T} = ma_\mathrm{T} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

corresponde a la componente de la fuerza en la dirección tangente a la trayectoria y es la responsable (causante) del *cambio en la magnitud de* *la velocidad*, por ello, a esta componente se le llama *fuerza tangencial*.

Igualmente,

$$F_N = \frac{mv^2}{\rho},$$

corresponde a la componente de la fuerza en la dirección normal, apuntando siempre hacia el centro de curvatura de la trayectoria y es la responsable (causante) del *cambio en la dirección de la velocidad*. A esta componente se le denomina *fuerza normal* o *centrípeta*.

Casos particulares de la ecuación (2.19)

1. Si sobre una partícula, $F_N = 0$ y $F_T \neq 0$, no hay cambio en la dirección de la velocidad y el movimiento es rectilíneo acelerado, ya que F_T genera un cambio en la magnitud de la velocidad. Si en este caso, F_T es constante, se tiene movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

2. Si sobre una partícula, $F_N = 0$ y $F_T = 0$, no cambia la dirección ni la magnitud de la velocidad y el cuerpo tiene movimiento rectilíneo uniforme (MRU), o se encuentra en reposo.

3. Si sobre una partícula, $F_N \neq 0$ y $F_T = 0$, no hay cambio en la magnitud de la velocidad, sólo cambia su dirección como en el movimiento circular uniforme, que se analiza en lo que sigue.

2.7.1. Dinámica del movimiento circular

Cuando una partícula de masa m, describe una trayectoria circular donde $\rho = R$ y $v = \omega R$, las componentes tangencial y normal de la fuerza adquieren la forma

$$\mathbf{F}_T = (m\alpha R)\mathbf{u}_T \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_N = (m\omega^2 R)\mathbf{u}_N,$$

que no son fuerzas aplicadas sino que corresponden, respectivamente, a las componentes tangencial y normal de la fuerza resultante.

En el caso de movimiento circular uniforme, sólo se tiene cambio en la dirección de la velocidad, es decir, $\mathbf{F} = F_N\mathbf{u}_N$.

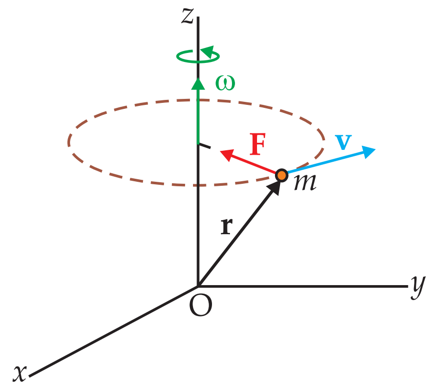


Figura 2.25: *Vectores* $\mathbf{v}$, ω *y* $\mathbf{F}$ *en un MCU.*

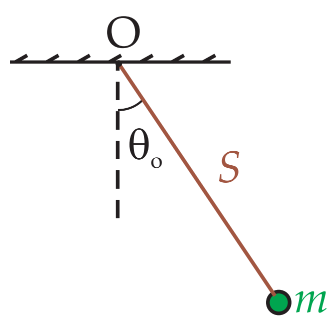
En forma vectorial, para movimiento circular uniforme, y de acuerdo con la figura 2.25 se tiene

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

o sea, que la segunda ley de Newton adquiere la forma

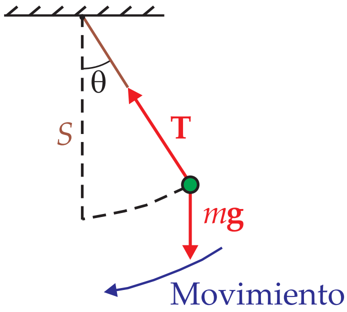
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (m\mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}.$$

Ejemplo 2.12.
El péndulo simple consiste en una partícula de masa m, suspendida de una cuerda de longitud S, como se ilustra en la figura. Suponga que la partícula se suelta desde una posición tal que la cuerda forma un ángulo θ_o con la vertical, como se muestra en la figura siguiente. a) Dibuje las fuerzas que actúan sobre la partícula. b) Plantee las ecuaciones de movimiento. c) Determine para la partícula, en función de θ, la aceleración angular, la velocidad angular y la tensión en la cuerda. d) Determine como es la magnitud de las cantidades anteriores en los extremos de la trayectoria y en su centro.



Solución
a) Diagrama de cuerpo libre para la

partícula Sobre la partícula, en la posición



general θ, las fuerzas que actúan son el peso y la tensión que ejerce la cuerda sobre ella.
b) La ecuación de movimiento en la dirección radial o centrípeta, tomando el sentido de la tensión como positivo, es

$$T - mg\cos\theta = m\omega^2 S, \qquad (1)$$

y en la dirección tangencial, tomando como positivo el sentido del movimiento supuesto en la figura, es

$$mg\,\text{sen}\theta = m\alpha S. \qquad (2)$$

c) De la ecuación (2), la aceleración angular de la partícula está dada por

$$\alpha = \frac{g}{S}\,\text{sen}\theta. \qquad (3)$$

teniendo en cuenta la definición de aceleración angular, la ecuación (3) se transforma en

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{S}\,\text{sen}\theta, \qquad (4)$$

donde se tienen las variables ω, t y θ. Con el fin de resolver la ecuación (4) se hace necesario eliminar la variable tiempo, ya que interesa obtener $\omega(\theta)$. Multiplicando a ambos lados de la ecuación (4) por dθ, se llega a la expresión

$$-\omega\mathrm{d}\omega = \frac{g}{S}\,\text{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta, (5)$$

el signo menos en la ecuación aparece ya que en la situación de la figura, a medida que transcurre el tiempo el ángulo θ disminuye.

Integrando la ecuación (5) entre los límites $\omega = 0$ cuando $\theta = \theta_o$ y ω en la posición angular θ, se obtiene

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{S}(\cos\theta - \cos\theta_o)}, \qquad (6)$$

mediante las ecuaciones (1) y (6), se llega a

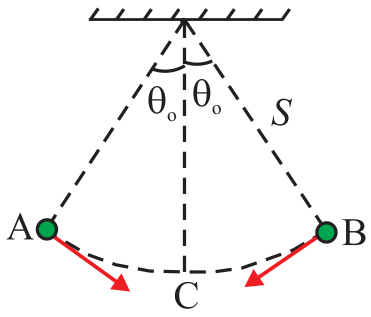
$$T = mg\left[3\cos\theta - 2\cos\theta_o\right]. \qquad (7)$$

d) De las ecuaciones (3), (6) y (7) se obtiene para los extremos A y B, donde $\theta = \theta_o$

$$\alpha = \frac{g}{S}\,\text{sen}\theta_o,$$

$$\omega = 0,$$

$$T = mg\cos\theta_o.$$



Ahora, en el centro de la trayectoria C con $\theta = 0$

$$\alpha = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{S}(1 - \cos\theta_o)},$$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_o).$$

De estos resultados, entre las posiciones B y C se tiene que al soltar la partícula desde el punto B, la aceleración angular disminuye desde un valor máximo hasta cero, mientras que la velocidad angular aumenta desde cero hasta un valor máximo y la tensión aumenta entre estos dos puntos. Entre las posiciones C y A se presentan cambios opuestos en estas cantidades. En conclusión, donde la aceleración es máxima (extremos de la trayectoria), la velocidad angular es mínima (cero) y viceversa. Igualmente, se observa que la tensión adquiere su máximo valor en el centro de la trayectoria y el mínimo en los extremos.

Ejercicio 2.9.
a) Analizar los resultados del problema anterior suponiendo que $\theta_o = \pi/2$ b) ¿Por qué razón en el punto C, la tensión en la cuerda no es igual al peso de la partícula?

2.7.2. Movimiento curvilíneo en componentes rectangulares

Cuando una partícula de masa m se mueve en el plano xy, la segunda ley de Newton adquiere la forma

$$F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}),$$

donde

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t},$$

corresponden a las componentes escalares del vector aceleración. Las respectivas componentes de la fuerza se muestran en la figura. 2.26.

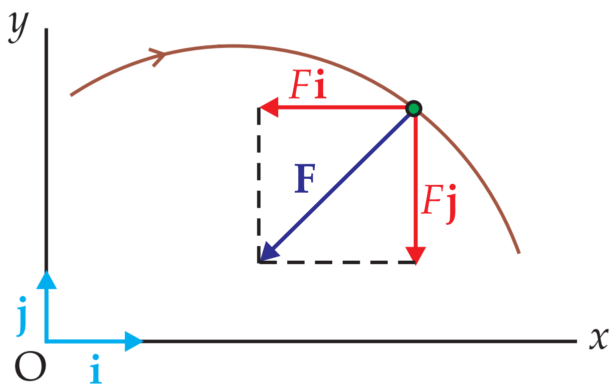


Figura 2.26: *Componentes rectangulares del vector fuerza.*

2.8. Vector momento angular de una partícula

Para una partícula con masa m y momento lineal $\mathbf{p}$, el momento angular $\mathbf{L}$ respecto al punto O de la figura 2.27, se define en la forma

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{2.20}$$

De acuerdo con la definición de momento angular dada por la ecuación (2.20), se tiene que $\mathbf{L}$ es un vector perpendicular al plano formado por el vector posición $\mathbf{r}$ y el vector velocidad $\mathbf{v}$.

Teniendo en cuenta la definición de producto vectorial o producto cruz, el momento angular

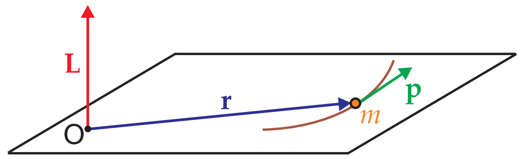


Figura 2.27: *Momento angular de una partícula respecto al punto O.*

de la partícula se puede obtener mediante el determinante

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \tag{2.21}$$

Luego de resolver el determinante dado por la ecuación (2.21), se encuentra que las componentes rectangulares del momento angular de la partícula, están dadas por

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y, \\ L_y &= zp_x - xp_z, \\ L_z &= xp_y - yp_x. \end{aligned}$$

Si la partícula se mueve en plano xy, se tiene $z = 0$ $p_z = 0$, por lo que las componentes del momento angular $L_x = L_y = 0$ y sólo hay componente de momento angular en la dirección z, es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= L_z\mathbf{k} \\ &= (xp_y - yp_x)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

o en forma escalar

$$\begin{aligned} L &= L_z \\ &= xp_y - yp_x. \end{aligned}$$

Dimensiones y unidades de momento angular De acuerdo con la definición dada por la ecuación (2.20), el momento angular son tiene dimensiones de $\mathrm{ML^2T^{-1}}$. De este modo, la unidad en el sistema SI está dada por $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$ y en el sistema gaussiano por $\mathrm{g \cdot cm^2 \cdot s^{-1}}$.

En general, el vector momento angular es una cantidad física que cambia en magnitud y dirección mientras la partícula se encuentra en movimiento curvilíneo. En el caso particular de un movimiento circular, se pueden presentar las siguientes situaciones, en lo que respecta a la dirección:

1. Que el punto de referencia O, se encuentre sobre el eje z pero fuera del plano en el cual se mueve la partícula, como se ilustra en la figura 2.28.

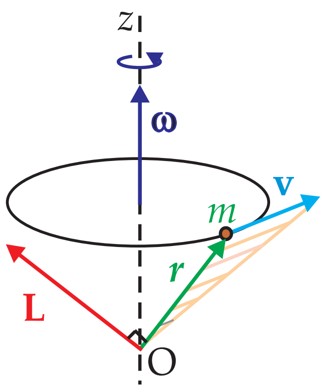


Figura 2.28: *Dirección variable del momento angular* **L**.

En este caso, el vector momento angular **L** varía en dirección ya que el plano formado por el vector posición **r** y el vector velocidad **v**, cambia su orientación mientras la partícula describe la trayectoria circular.

2. Si el punto de referencia O como se muestra en la figura 2.29, se encuentra sobre el eje z y en el plano de movimiento de la partícula, la dirección del vector momento angular **L** es invariante, ya que en este caso es un vector perpendicular al plano de movimiento, pues el vector posición **r** y el vector velocidad **v** están en el mismo plano.

En este caso de movimiento circular con O en el centro del círculo, el vector posición **r** es perpendicular al vector velocidad **v** y sus magnitudes están relacionadas mediante la expresión $v = \omega r$, donde r es el radio de la trayectoria circular. Así, la magnitud del momento angular es

$$L = mrv = mr^2\omega.$$

Como el momento angular **L** y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, son vectores paralelos, en forma vectorial se tiene que

$$\mathbf{L} = (mr^2)\boldsymbol{\omega}.$$

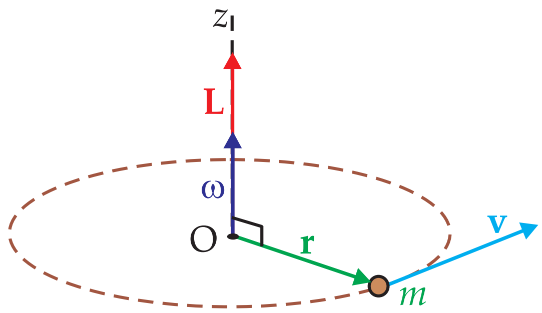


Figura 2.29: *Dirección invariante del momento angular* **L**.

En el caso más general de un movimiento curvilíneo cualquiera y recordando que el vector velocidad, en coordenadas polares, está dado por $\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{u}_\theta + v_r \mathbf{u}_r$, se tiene que el momento angular también se puede expresar en la forma

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times (v_\theta \mathbf{u}_\theta + v_r \mathbf{u}_r) = mv_\theta \mathbf{r} \times \mathbf{u}_\theta,$$

donde el segundo producto, a la derecha de la primera igualdad, se hace cero ya que el vector posición **r** es paralelo al vector unitario radial $\mathbf{u}_r$. Por consiguiente, su magnitud en este caso es

$$L = mrv_\theta = mr^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

2.8.1. Variación del vector momento angular con el tiempo

Ahora se considera la variación del vector momento angular con el tiempo. Derivando la ecuación (2.20) con respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

donde el segundo producto a la derecha de la primera igualdad es cero, ya que el vector velocidad **v** es paralelo al vector momento lineal **p**, mientras que el segundo producto corresponde a la forma matemática de la segunda ley de Newton. De este modo, la variación del momento angular con el tiempo está relacionada con la fuerza neta que actúa sobre la partícula, mediante la ecuación (2.22).

La ecuación (2.22) es fundamental cuando se analiza el movimiento de rotación, con la condición que $\mathbf{L}$ y $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ sean evaluados respecto al mismo punto. Esta expresión desempeña en el movimiento rotación, el mismo papel que la segunda ley de Newton en el movimiento de traslación.

2.8.2. Conservación del momento angular y fuerzas centrales

Si en la ecuación (2.22), el producto vectorial entre el vector posición $\mathbf{r}$ y la fuerza resultante $\mathbf{F}$ es cero, se tiene que el vector momento angular es una constante del movimiento. Por lo tanto, se tiene que el momento angular de una partícula es constante si el producto vectorial $r \times F$ es cero. Esta situación se presenta en los dos casos siguientes.

1. Si la fuerza neta sobre la partícula es cero, se tiene una partícula libre, es decir, $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ y la condición $\mathbf{L} =$ Constante se satisface.

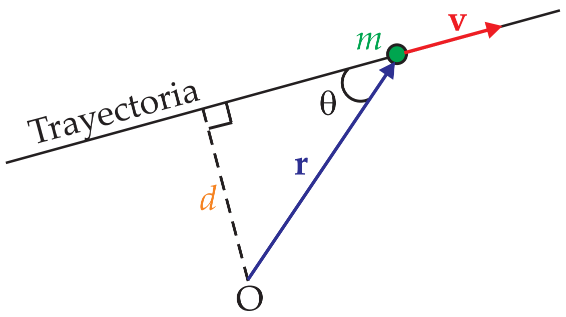


Figura 2.30: *Momento angular en el movimiento rectilíneo.*

En la figura 2.30, se considera una partícula de masa m con movimiento rectilíneo uniforme y con origen de coordenadas O. Por lo tanto

$$\mathbf{L} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} \qquad ,$$

ó en magnitud

$$L = mrv\,\text{sen}\theta.$$

Como muestra la figura 2.30, $d = r\,\text{sen}\theta$, por lo que

$$L = mvd$$

con m, v y d son constantes, el vector momento angular es constante en magnitud y dirección ya que es un vector que entra perpendicularmente al plano de la hoja mientras la partícula se encuentre en movimiento sobre la trayectoria rectilínea.

2. Igualmente, el producto vectorial entre el vector posición $\mathbf{r}$ y la fuerza $\mathbf{F}$ se hace cero, si son vectores paralelos con la misma línea de acción, es decir, si la línea de acción de la fuerza pasa por un punto fijo, como se ilustra en la figura 2.31 donde una partícula de masa m se mueve sobre una trayectoria curvilínea, siendo O un punto de referencia fijo. Por consiguiente, el momento angular de esta partícula se conserva.

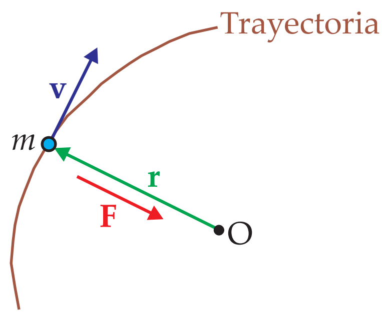


Figura 2.31: *Fuerza central.*

Cuando una fuerza actúa sobre una partícula en movimiento y cumple la condición de pasar su línea de acción por un punto fijo, llamado *centro de fuerzas*, se dice que la fuerza es una *fuerza central*.

En conclusión, cuando un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza central, su momento angular no varía, es decir, el momento angular del cuerpo respecto al centro de fuerza es una constante de movimiento.

En la naturaleza se presentan situaciones en las que se cumple la condición anterior, como ocurre en los siguientes casos:

1. En el movimiento de la tierra alrededor del sol, el momento angular de la tierra respecto al sol es una constante del movimiento. En este caso, el punto fijo se encuentra en el centro del sol como se muestra en la figura 2.32, pues se observa que la línea de acción de la fuerza gravitacional que el sol ejerce sobre la tierra pasa por el centro del sol independientemente de la posición de la tierra sobre la trayectoria elíptica. De

este modo, la fuerza que el sol ejerce sobre la tierra es una fuerza central.

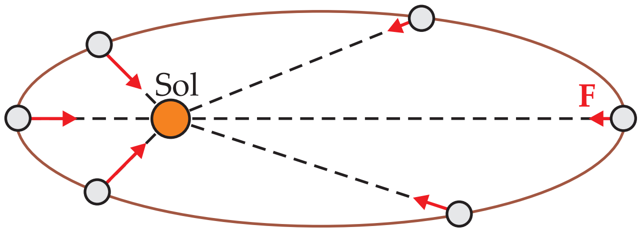


Figura 2.32: *Movimiento de la tierra alrededor del Sol.*

2. En el modelo atómico de Bohr el movimiento del electrón, de masa m, en el átomo de hidrógeno, es tal que su momento angular es una constante del movimiento, ya que la fuerza eléctrica que el núcleo de carga positiva ejerce sobre el electrón de carga negativa, siempre pasa por el núcleo independientemente de la posición del electrón en la trayectoria circular. Esta situación se ilustra en la figura 2.33.

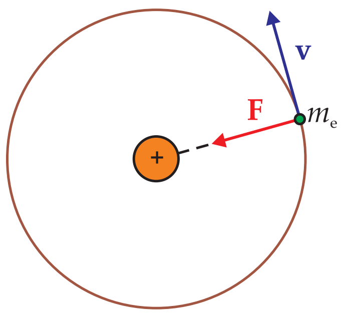
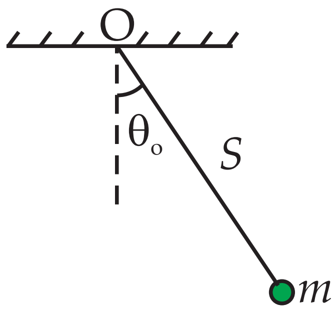


Figura 2.33: *Movimiento electrónico en el átomo de Bohr.*

En síntesis, la fuerza que el núcleo ejerce sobre el electrón en el átomo de hidrógeno, es una fuerza central.

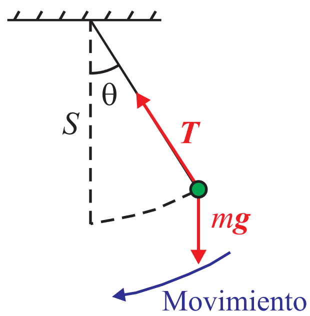
Ejemplo 2.13.
Considere un péndulo simple de masa m, donde la longitud de la cuerda es S. Suponga que la partícula se suelta desde una posición tal que la cuerda forma un ángulo θ_o con la vertical, como se muestra en la figura siguiente. a) Determine el momento angular de la partícula respecto al punto de suspensión O. b) Halle la variación del momento angular de la partícula, respecto al tiempo. c) Determine el producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector posición de la partícula respecto a O y $\mathbf{F}$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula. d) Compare los resultados obtenidos en los numerales b) y c). ¿Qué se puede concluir?



Solución
a) Por la ecuación (2.20) y teniendo en cuenta que el vector posición $\mathbf{r} = S\mathbf{u}_r$ es perpendicular a la velocidad se tiene que el momento angular es un vector de magnitud

$$L = mSv, \tag{1}$$

que incide perpendicularmente al plano de la hoja, para la situación mostrada en la siguiente figura.



Tomando la ecuación

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{S}(\cos\theta - \cos\theta_o)},$$

obtenida en el ejemplo 2.11, con $v = \omega S$, se tiene para la velocidad de la partícula

$$v = \sqrt{2gS(\cos\theta - \cos\theta_o)}. \tag{2}$$

Reemplazando la ecuación (2) en la ecuación (1), la magnitud del momento angular de la partícula respecto al punto de suspensión O, es

$$L = mS\sqrt{2gS(\cos\theta - \cos\theta_o)}. \tag{3}$$

Si se toma el eje z entrando perpendicularmente al plano de la hoja, en forma vectorial la ecuación (3) se transforma en

$$\mathbf{L} = mS\sqrt{2gS(\cos\theta - \cos\theta_o)}\,\mathbf{k}. \qquad (4)$$

b) Derivando la ecuación (4) respecto al tiempo donde la única variable es el ángulo θ, y empleando la definición de velocidad angular se llega a

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = -(mgS\,\mathrm{sen}\theta)\mathbf{k}, \qquad (5)$$

o sea, es un vector que sale perpendicularmente del plano de la hoja.

c) Como $\mathbf{r} = S\mathbf{u}_\mathrm{r}$ y $\mathbf{F} = m\mathbf{g} + T\mathbf{u}_\mathrm{N}$, al descomponer el peso en las componentes radial y transversal con $\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{u}_\mathrm{T}$ y $\mathbf{u}_\mathrm{N} = -\mathbf{u}_r$, se tiene para el producto vectorial

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F} = -(mgS\,\mathrm{sen}\theta)\mathbf{k}. \qquad (6)$$

Al comparar las ecuaciones (5) y (6), se tiene que se cumple la relación

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r}\times\mathbf{F},$$

resultado coincidente con la ecuación (2.22) y que tiene validez general.

Pregunta

De acuerdo con el resultado obtenido en el numeral d) del ejemplo 2.13, ¿se conserva el momento angular de la partícula? Justifique su respuesta.

2.9. *Sistemas de masa variable

En las secciones anteriores se consideraron situaciones donde la masa de los cuerpos es constante, por lo que la segunda ley de Newton tiene la forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, la cual es válida solo para masa constante. Pero a diario se presentan situaciones en las cuales la masa del sistema o cuerpo en movimiento no es una constante, por ejemplo un auto, una aeronave, un trasbordador espacial, un bloque de hielo que desliza por un plano inclinado, etc.

En lo que sigue, se consideran sistemas en los cuales la masa es variable y la segunda ley de Newton a utilizar es $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$, en forma más general.

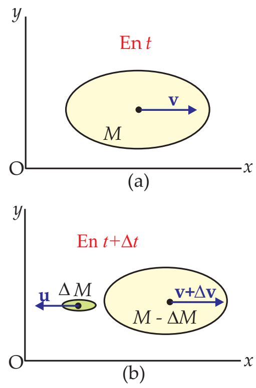


Figura 2.34: *Sistema de masa variable.*

Se considera que el sistema de la figura 2.34.a tiene masa M, velocidad $\mathbf{v}$ respecto a un sistema de referencia inercial y que sobre él actúa una fuerza externa $\mathbf{F}_{\mathrm{ext.}}$, en un tiempo t.

Igualmente se supone que en un tiempo $t + \Delta t$, la configuración ha cambiado a la que se muestra en la figura 2.34.b.

Al considerar las dos situaciones anteriores, se tiene que una masa ΔM ha sido arrojada del cuerpo principal, moviéndose con velocidad $\mathbf{u}$ respecto al mismo sistema de referencia inercial.

Por lo tanto, la masa del cuerpo principal se ha reducido a $M - \Delta M$ y la velocidad ha cambiado a $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$.

Se puede imaginar que el sistema de la figura 2.34 corresponde a un cohete que arroja gases calientes por un orificio a una velocidad elevada, disminuyendo su masa y aumentando su propia velocidad. En un cohete, la pérdida de masa es continua durante el proceso de consumo de combustible, la fuerza externa $\mathbf{F}_{\mathrm{ext.}}$ no es el empuje del cohete sino la fuerza de gravedad sobre él y la fuerza de resistencia que presenta la atmósfera.

Para el análisis de la figura 2.34 se considerará al sistema como de masa constante, es decir, se consideran simultáneamente las masas $M - \Delta M$ y ΔM, así la masa total del sistema es M, lo que permite analizarlo como un sistema de masa constante y así poder obtener la segunda ley de Newton para sistemas en los que la masa no es constante.

La segunda ley de Newton en forma general para esta situación es

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.23}$$

Para un intervalo Δt pequeño, la ecuación (2.23) se puede escribir aproximadamente en la forma

$$\mathbf{F} \approx \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{p}_\mathrm{f} - \mathbf{p}_\mathrm{i}}{\Delta t}, \tag{2.24}$$

donde las cantidades de movimiento inicial y final son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\mathrm{i} &= M\mathbf{v}, \\ \mathbf{p}_\mathrm{f} &= (M - \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + \Delta M\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Reemplazando las ecuaciones (2.25) en la ecuación (2.24)

$$\mathbf{F}_\mathrm{ext.} \approx \frac{[(M - \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + \Delta M\mathbf{u}]}{\Delta t} - M\frac{\mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Efectuando los productos indicados se obtiene

$$\mathbf{F}_\mathrm{ext.} \approx M\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} + [\mathbf{u} - (\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v})]\frac{\Delta M}{\Delta t}. \tag{2.26}$$

Si $\Delta t \to 0$, la configuración de la figura 2.34.b se aproxima a la configuración de la figura 2.34.a y los términos de la ecuación (2.26) se transforman en

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a},$$

que corresponde a la aceleración del sistema en la figura 2.34.a.

Como ΔM es la masa expulsada en un tiempo Δt, se presenta una disminución de la masa del cuerpo original, esto es

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} = -\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t},$$

el signo menos se debe a que $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ es intrínsecamente negativa y para que quede positiva es necesario colocarle un signo menos.

Además, cuando $\Delta t \to 0$ y $\Delta\mathbf{v} \to 0$, la ecuación (2.26) se convierte en

$$\mathbf{F}_\mathrm{ext.} = M\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} - \mathbf{u}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}, \tag{2.27}$$

o en forma más compacta

$$\mathbf{F}_\mathrm{ext.} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\mathbf{v}) - \mathbf{u}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}. \tag{2.28}$$

La ecuación (2.28) es la forma que adquiere la segunda ley de Newton para analizar las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo de masa variable, respecto a un sistema de referencia inercial.

Si la masa M es constante, su derivada respecto al tiempo es cero y la ecuación (2.28) se convierte en $\mathbf{F}_\mathrm{est} = M\mathbf{a}$, que es la forma de la segunda ley de Newton para masa constante.

En la ecuación (2.27), la cantidad $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{v}_\mathrm{rel}$ es la velocidad relativa de la masa arrojada respecto al cuerpo principal, de este modo la ecuación (2.27) puede escribirse como

$$\mathbf{F}_\mathrm{ext.} = M\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} - (\mathbf{u} - \mathbf{v})\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t},$$

o en la forma

$$M\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_\mathrm{ext.} + \mathbf{v}_\mathrm{rel.}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}, \tag{2.29}$$

siendo $\mathbf{v}_\mathrm{rel.}\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ la fuerza ejercida *sobre* el cuerpo principal por la masa que sale de él o por la que llega a él. Para un cohete esta fuerza se llama *empuje*. Si esta fuerza se denomina fuerza de reacción que es ejercida sobre el cuerpo principal por la masa que sale o llega a él, se tiene

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_\mathrm{ext.} + F_\mathrm{reaccin}.$$

Para resolver la ecuación (2.29), en el caso de un cohete, se hacen las siguientes consideraciones:

1. Se desprecia la resistencia del aire.
2. Se desprecia la variación de la aceleración de la gravedad con la altura.
3. Se supone que la velocidad de escape de los gases con respecto al cohete ($v_\mathrm{rel.}$) es constante.
4. Se supone que el movimiento es vertical.

Con las suposiciones anteriores y tomando el sentido de movimiento como positivo, se tiene

$\mathbf{v} = +v\mathbf{j}$, $F_{\rm ext.} = -mgj$, $\mathbf{v}_{\rm rel.} = -v_{\rm rel.}\mathbf{j}$, así la ecuación (2.29) adquiere la forma

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v_{\rm rel.}}{M}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -g,$$

donde al integrar y evaluar con $t_o = 0$ cuando la masa es $M_{\rm o}$, se encuentra

$$v = v_o + v_{\rm rel.}\ln\left(\frac{M_o}{M}\right) - gt.$$

Por ejemplo, la velocidad del cohete cuando la masa se reduce a la mitad, habiendo partido del reposo, es

$$v = v_{\rm rel.}\ln 2 - gt.$$

PREGUNTAS

1. Un cuerpo pesa 147 N sobre la superficie de la tierra y 24.5 N sobre la superficie de la luna (la aceleración de la gravedad en la luna es un sexto de la gravedad en la tierra). ¿Tiene este cuerpo mayor inercia en la tierra que en la luna? Justifique la respuesta.
2. Una esfera pequeña de hierro, que esta sujeta del techo mediante una cuerda inextensible, oscila alrededor del punto medio de su trayectoria. Si en un momento determinado se rompe la cuerda, estando la esfera en la parte más baja de la trayectoria, ¿cuál es su trayectoria posterior? Justifique la respuesta.
3. Sobre una mesa se coloca una hoja de papel y encima de esta un vaso con agua. ¿Por qué el vaso permanece en reposo, cuando se tira rápidamente la hoja de papel?
4. Una persona se encuentra en el interior de un autobús que posee movimiento rectilíneo. De repente la persona es arrojada hacia la parte trasera del auto. ¿Qué se puede decir sobre lo sucedido? ¿Por qué?
5. Un nadador que se tira desde el trampolín, experimenta un sensación de ingravidez. ¿Por qué se tiene esta sensación? ¿Acaso deja de actuar la fuerza de gravedad sobre el nadador?
6. Se tiene un cable sometido a tensión en sus extremos. ¿Es posible que se mantenga en posición horizontal? ¿Por qué?
7. Un libro que se encuentra sobre una escritorio horizontal es empujado con la mano. Haga el diagrama de cuerpo libre para el libro. Si cada una de las fuerzas dibujadas corresponde a la acción, ¿sobre cuál cuerpo actúa la reacción en cada caso?
8. Muchas veces al caminar descuidado, se tropieza con un obstáculo tal como una piedra. El dolor que se percibe, ¿es consecuencia de cuál ley de Newton? Justifique la respuesta.
9. Un cuerpo de masa 5.0 kg, está suspendido de un dinamómetro. Un estudiante afirma que la fuerza ejercida por el dinamómetro sobre el cuerpo es 49 N y que esto es consecuencia de la tercera ley de Newton. ¿Está de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?
10. Un auto está en reposo sobre el piso horizontal de un parqueadero. ¿Es correcto afirmar que las fuerzas que actúan sobre el auto son iguales y opuestas debido a la tercera ley de Newton?
11. Desde una aeronave en vuelo, un paracaidista se lanza al vacío. a) ¿Qué movimiento adquiere el paracaidista antes de abrir el paracaídas? ¿Por qué? b) ¿Qué movimiento puede llegar a adquirir el paracaidista, un tiempo después de abrir su paracaídas? ¿Por qué?
12. Suponga que la luna se mueve con rapidez constante, en una trayectoria circular alrededor de la tierra. a) ¿Tiene algo que ver el movimiento de la luna, con la primera ley de Newton? ¿Por qué? b) ¿La velocidad de la luna respecto a la tierra es constante? ¿Por qué? c) ¿Es nula la fuerza neta sobre la luna? ¿Por qué?
13. Una pequeña esfera de cobre permanece suspendida verticalmente. ¿Se puede presentar una situación física diferente, en la cual la tensión en la cuerda adquiera una valor mayor que el peso de la esfera? ¿Por qué?
14. Una persona hace girar una piedra pequeña, sujeta a una cuerda, alrededor de su cabeza. a) ¿Podrá lograr que la cuerda se mantenga horizontal? ¿Por qué? b) ¿Qué se puede decir respecto a la variación del momento angular de la partícula, a medida que transcurre el tiempo? ¿Por qué?