5 MECANICA DE FLUIDOS

BERNARDO ARENAS GAVIRIA
Universidad de Antioquia
Instituto de Física

2011

Índice general

Capítulo 5

Mecánica de fluidos

Competencias de la unidad.
Se busca que el estudiante:

- Identifique las fases macroscópicas en las cuales se presenta la materia, distinguiendo entre la fase sólida y la fase fluida.
- Muestre propiedades físicas diferentes entre líquidos y gases, e identifique las propiedades comunes en líquidos y gases.
- Defina correctamente el concepto de fluido.
- Identifique la densidad como una propiedad característica de toda sustancia.
- Obtenga la densidad de una sustancia, conociendo su masa y el volumen que ocupa.
- Infiera cuáles fuerzas permiten que un fluido permanezca en reposo y cuáles no.
- Defina y aplicar el concepto de presión.
- Analice la variación de la presión con la profundidad, en el interior de un fluido.
- Analice la construcción y el funcionamiento de un barómetro y de un manómetro.
- Obtenga, analizar y aplicar el principio de Pascal y el principio de Arquímedes.
- Analice en modelo utilizado en la dinámica de fluidos.
- Defina correctamente un fluido perfecto o ideal, cuando está en movimiento.
- Distinga entre línea de flujo y línea de corriente, para un fluido en movimiento.
- Obtenga un tubo de flujo, en un fluido en movimiento.
- Obtenga la ecuación de continuidad, utilizando el principio de conservación de la masa.
- Obtenga la ecuación de Bernoulli, utilizando el teorema del trabajo y la energía.
- Aplique la ecuación de continuidad y la ecuación de Bernoulli, en el movimiento de fluidos.
- Obtenga la velocidad de un fluido, utilizando un medidor de Venturi.
- Muestre diferentes aplicaciones de la estática y la dinámica de fluidos.

CONCEPTOS BASICOS
En esta unidad, se definen los conceptos básicos en el estudio de la estática y la dinámica, tanto de líquidos como de gases: Definición de fluido, fuerza distribuida y fuerza concentrada, Presión (P), Principio de Pascal, densidad (ρ), presión absoluta y presión manométrica, presión en la interfase de dos fluidos, barómetro y manómetro, Principio de Arquímedes, fluido ideal, línea de flujo y línea de corriente, tubo de flujo, Ecuación de Continuidad y conservación de la masa, Ecuación de Bernoulli y conservación de la energía.

5.1. Introducción

Aunque los sólidos son las sustancias más familiares en la vida cotidiana, sólo comprenden una pequeña parte de toda la materia del universo. La mayor parte de esa materia se encuentra en forma de un tipo u otro de *fluido*. Esto lleva a clasificar la materia, considerada macroscópicamente, en sólidos y fluidos. Desde el punto de vista microscópico, es posible explicar esta clasificación teniendo en cuenta que toda la materia está formada por átomos que interactúan mutuamente, y es la intensidad de estas interacciones la que en última instancia permite que la sustancia se comporte como un sólido o como un fluido. Si la intensidad de las fuerzas entre los átomos es grande, la sustancia se presenta en fase sólida, en cambio, si la intensidad de las fuerzas interatómicas es muy débil, la sustancia se encuentra en la fase gaseosa. Cuando las fuerzas entre átomos no son tan grandes como en los sólidos, ni tan pequeñas como en los gases, se tiene la fase líquida. Dinámicamente se puede interpretar la fase sólida, difícil de deformar, con la poca libertad de movimiento de los átomos, una situación completamente opuesta a la que ocurre en el caso de los gases, donde los átomos se mueven de forma casi independiente, esto es, su movimiento prácticamente no es afectado por la presencia de los demás. En el caso de los líquidos su movimiento no es tan afectado por los demás átomos, como en los sólidos pero tampoco es tan independiente como en los gases sino que se presenta un término medio. Un gas se comprime fácilmente, mientras que un líquido es prácticamente incompresible. En este estudio no se consideran las pequeñas variaciones de volumen que experimenta un líquido sometido a presión, es decir, estos se consideran incompresibles, o de volumen constante. Como consecuencia de lo descrito anteriormente, los fluidos adquieren la forma del recipiente que los contiene y pueden fluir debido a la mayor independencia de movimiento que tienen los átomos en estas sustancias, en comparación con los átomos en sólidos. Un fluido como su nombre lo indica, es una sustancia que puede fluir, esto es, el término fluido incluye a líquidos y gases. A pesar que las propiedades de los líquidos y gases difieren bastante, en esta unidad se considera las que son comunes como es el hecho de fluir y de adquirir la forma del recipiente que los contiene.

De esta forma, las mismas leyes fundamentales rigen el comportamiento estático y dinámico tanto de líquidos como de gases a pesar de las diferencias que se presentan entre ellos, según se observan normalmente.

Puesto que los fluidos cambian de forma fácilmente y, en el caso de los gases, tienen un volumen igual al del depósito en que están encerrados, se deben desarrollar nuevas técnicas que permitan analizar la mecánica de fluidos.

En esta unidad, a diferencia de las unidades 2 y 4, se analiza inicialmente la estática de fluidos, esto es el estudio de fluidos en reposo, para luego considerar la dinámica de fluidos o estudio de fluidos en movimiento. A pesar de hacerlo en esta forma, se mostrará que la estática de fluidos es un caso particular de la dinámica de fluidos.

5.2. Estática de fluidos

5.2.1. Fuerza distribuida y fuerza concentrada

Hasta este momento se han considerado fuerzas que están aplicadas sobre una partícula de un cuerpo. A este tipo de fuerza se le conoce como *fuerza concentrada* por el hecho de actuar sobre un punto del cuerpo. Otro tipo de fuerza se conoce como *fuerza distribuida*, donde a diferencia de las fuerzas concentradas, éstas actúan sobre una superficie determinada de un cuerpo o sustancia. Por ejemplo, cuando un libro se coloca sobre una mesa, la fuerza que el libro ejerce sobre ella está distribuida sobre toda la superficie del cuerpo en contacto con la mesa; en este caso se tiene un sistema de fuerzas paralelas, que es posible reemplazar por una fuerza única concentrada que es equivalente, como se analizó en la unidad 4. En esta situación, la fuerza única corresponde al peso del libro, que está aplicado en su centro de masa.

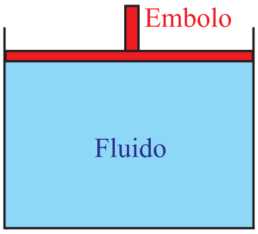


Figura 5.1: *Fuerza distribuida ejercida por un émbolo.*

Una situación similar se presenta cuando en un recipiente que contiene un fluido, se dispone de un émbolo hermético y móvil, como se muestra en la figura 5.1, donde el peso del émbolo está distribuido sobre toda la superficie en contacto con el fluido.

Para un fluido en reposo, la fuerza distribuida en la superficie siempre debe estar dirigida perpendicularmente a la superficie. En efecto, un fluido en reposo no puede resistir una fuerza tangencial ya que las capas del fluido resbalarían unas sobre las otras cuando se las sometiera a tal fuerza. Por otra parte, es precisamente la incapacidad de los fluidos de resistir tales fuerzas tangenciales (o esfuerzos cortantes) lo que les da la propiedad característica de cambiar su forma, y por ende de fluir. Lo anterior se ilustra en las figuras 5.2 y 5.3.

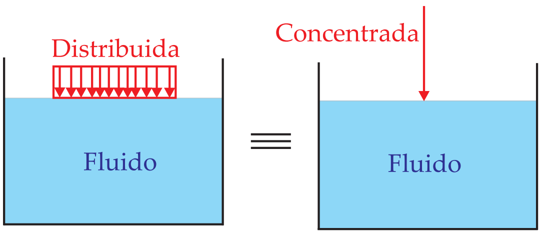


Figura 5.2: *Fuerza distribuida y fuerza concentrada.*

Figura 5.3: *Fuerzas sobre un fluido estático.*

5.3. Presión en un fluido

Hay una diferencia cuando una fuerza superficial actúa sobre un cuerpo rígido en reposo y sobre un fluido. Para un cuerpo rígido en reposo, no hay ninguna restricción respecto a la dirección en que se aplique una fuerza sobre la superficie, como se ilustra en la figura. 5.4.

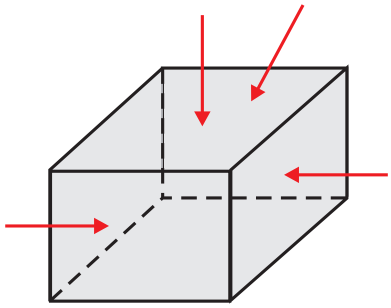


Figura 5.4: *Fuerzas sobre un cuerpo rígido.*

Se define la presión en un fluido como la magnitud de la fuerza "normal"por unidad de área de la superficie. La presión se transmite a los límites sólidos o a través de secciones arbitrarias de un fluido en tal forma que la fuerza de presión es perpendicular a esos límites o secciones en todos sus puntos. Así, como en la figura 5.5 la presión en *cualquier punto* se define como *la magnitud de la fuerza normal* dF*, ejercida sobre una pequeña superficie de área* dA *que incluya dicho punto, por unidad de área* dA, como se muestra en la figura 5.6.

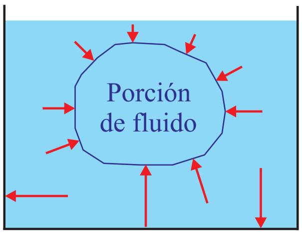


Figura 5.5: *Fuerzas de presión en un fluido estático.*

Matemáticamente, lo anterior se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} p &\equiv \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} \\ \mathrm{d}F &= p\mathrm{d}A, \end{aligned} \tag{5.1}$$

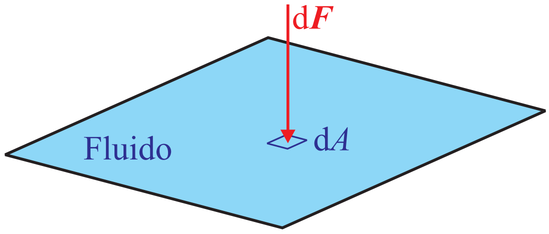


Figura 5.6: *Presión en un punto de un fluido.*

donde por la definición dada en la ecuación (5.1), se tiene que la presión es una cantidad escalar. Por otro lado, si la presión es la misma en todos los puntos de una superficie plana finita de área A, como en la figura 5.7, se obtiene

$$\begin{aligned} p &\equiv \frac{F}{A} \\ F &= pA. \end{aligned} \tag{5.2}$$

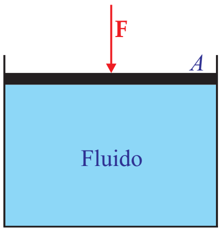


Figura 5.7: *Presión constante en la superficie de un fluido.*

Dimensiones y unidades de presión
De acuerdo con la definición dada por las ecuaciones (5.1) ó (5.2), las dimensiones de presión están dadas por $[p] = [F]\ [A^{-1}]$. Por ello, la unidad en el sistema SI de unidades es el Nm^{-2}, unidad conocida como Pascal (Pa), es decir, $1\,\mathrm{Pa} \equiv 1\,\mathrm{Nm}^{-2}$, que es la unidad más utilizada de presión.

5.3.1. Principio de Pascal

En esta sección se analiza lo que ocurre en el interior de un fluido cuando se ejerce una fuerza externa en ausencia de la gravedad. Esto es, no interesa por ahora el efecto de la gravedad, solamente interesa el efecto de la fuerza externa en el interior del fluido.

Como se indica en la figura 5.8, mediante un émbolo se ejerce una presión al fluido que se encuentra en el interior de un recipiente de forma rectangular. Se considerará la presión sobre el elemento infinitesimal de fluido de forma triangular.

Sólo se consideran las tres caras (lados) al trabajar en el plano, pero el resultado es válido para las caras frontal y opuesta.

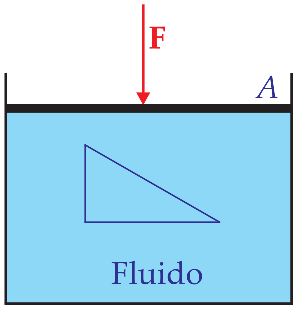


Figura 5.8: *Presión en el interior de un fluido debido a una fuerza externa.*

En realidad, las fuerzas están uniformemente distribuidas sobre las caras, pero por simplicidad se consideran como si estuvieran concentradas en el centro de las caras sobre las cuales actúan.

Como el fluido está en equilibrio estático, el elemento infinitesimal de volumen, de la figura 5.9, está igualmente en equilibrio estático. Esto ocurre si la fuerza neta que actúa sobre el elemento de volumen es cero. Por ello se trata este elemento como cuerpo de interés, donde el diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 5.9.

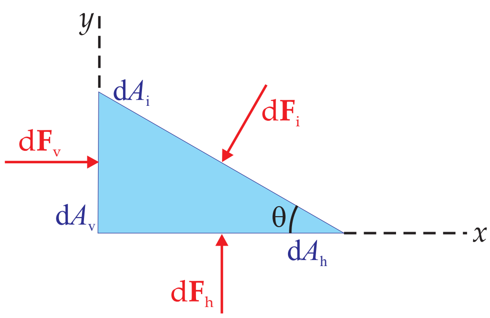


Figura 5.9: *Diagrama de cuerpo libre.*

Aplicando las condiciones de equilibrio, se tiene

$$\begin{aligned} \overset{+}{\rightarrow} \sum_{\mathrm{i}} F_x &= 0, \\ \mathrm{d}F_{\mathrm{v}} - \mathrm{d}F_{\mathrm{i}}\mathrm{sen}\theta &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum_{\mathrm{i}} F_y &= 0, \\ \mathrm{d}F_{\mathrm{h}} - \mathrm{d}F_{\mathrm{i}}\cos\theta &= 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Por la ecuación (5.1), se tiene que la presión del fluido sobre la cara vertical, está dada por

$$p_{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}A_{\mathrm{v}}}, \tag{5.5}$$

donde, de acuerdo con la figura 5.9

$$\mathrm{d}A_{\mathrm{v}} = \mathrm{d}A_{\mathrm{i}}\mathrm{sen}\theta. \tag{5.6}$$

Igualmente, la presión del fluido en la cara horizontal, es

$$p_{\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{h}}}{\mathrm{d}A_{\mathrm{h}}}, \tag{5.7}$$

con

$$\mathrm{d}A_{\mathrm{h}} = \mathrm{d}A_{\mathrm{i}}\cos\theta. \tag{5.8}$$

Mediante las ecuaciones (5.3), (5.5) y (5.6) se obtiene el resultado

$$p_{\mathrm{v}} = p_{\mathrm{i}}. \tag{5.9}$$

Similarmente, mediante las ecuaciones (5.4), (5.7) y (5.8) se obtiene

$$p_{\mathrm{h}} = p_{\mathrm{i}}. \tag{5.10}$$

De las ecuaciones (5.9) y (5.10), se puede concluir que

$$p_{\mathrm{v}} = p_{\mathrm{h}} = p_{\mathrm{i}}, \tag{5.11}$$

resultado que es válido sólo si no se consideran efectos gravitacionales.

Así, la presión sobre el elemento infinitesimal de fluido situado en una posición dada cualquiera dentro del fluido en reposo, es independiente de la orientación de sus superficies, es decir, la presión es *isótropa*, o sea, igual en todas las direcciones. Este es un resultado conocido como *principio de Pascal*.

Tabla 5.1. *Densidades de varias sustancias.*

Sustancia	Densidad ($\mathrm{kg\ m^{-3}}$)	Densidad relativa
Sólidos		
Platino	21.4×10^3	21.4
Oro	19.3×10^3	19.3
Plomo	11.3×10^3	11.3
Cobre	8.93×10^3	8.93
Hierro	7.86×10^3	7.86
Acero	7.85×10^3	7.85
Tierra (promedio)	5.52×10^3	5.52
Aluminio	2.70×10^3	2.70
Vidrios	2.50×10^3	2.50
Hueso	2.00×10^3	2.00
Hielo	9.17×10^2	0.917
Ladrillo	1.70×10^2	0.17
Fluidos		
Núcleo del Sol	1.6×10^5	160
Mercurio	13.6×10^3	13.6
Núcleo de la tierra	9.5×10^3	9.5
Glicerina	1.26×10^3	1.26
Agua de mar	1.025×10^3	1.025
Agua	1.00×10^3	1.00
Aceite de oliva	0.92×10^3	0.92
Aire (-147ºC)	9.2×10^2	0.92
Alcohol etílico	7.91×10^2	0.791
Gasolina	6.7×10^2	0.67
Oxígeno	1.429	1.429×10^{-3}
Aire (nivel del mar)	1.29	1.29×10^{-3}
Nitrógeno	1.25	1.25×10^{-3}
Vapor de agua (100ºC)	0.6	0.6×10^{-3}
Aire (20ºC)	0.20	0.2×10^{-3}
Helio	1.78×10^{-1}	1.78×10^{-4}
Hidrógeno	8.98×10^{-2}	8.98×10^{-5}

La presión ejercida sobre un fluido, que se encuentra en el interior de un recipiente, se transmite sin disminución a cada punto del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene. En síntesis, el principio de Pascal se expresa en la forma: *la presión se transmite a todos los puntos en el interior del fluido, de manera uniforme en todas las direcciones*.

Un medidor de presión sumergido en un fluido estático, en cierto punto, marcará la misma presión independientemente de cómo sea orientado.

5.3.2. Densidad

Cuando se trata de determinar la presión en el interior de un fluido, sometido al efecto de la gravedad, se hace necesario considerar el fluido que se encuentra por encima del punto de interés y por tanto la masa de ese fluido. En este caso, es de utilidad definir la *densidad*, que es una cantidad relacionada con la masa m del fluido, pero independiente del volumen V de la muestra particular que se considere. Se define la densidad como la masa por unidad de volumen, o sea

$$\rho \equiv \frac{m}{V}. \tag{5.12}$$

Dimensiones y unidades de densidad

La ecuación (5.12) muestra que las dimensiones de densidad son ML^{-3}. De este modo, la unidad en el sistema de unidades SI es el kgm^{-3} y en el sistema gaussiano el gcm^{-3}.

Aunque, en general, la densidad de un fluido homogéneo depende de la presión y la temperatura, en esta unidad se supone que la temperatura es una constante igual a la temperatura ambiente.

Al aumentar la presión de un fluido, contenido en el interior de un recipiente, el volumen disminuye y la densidad de dicha cantidad de sustancia aumenta. Aunque es un efecto que siempre está presente, en condiciones ordinarias de presión y temperatura, se encuentra que en los líquidos el volumen disminuye muy poco y en los gases disminuye bastante; así, para los fines de interés, en lo que sigue se supone que la densidad de los líquidos permanece constante, mientras que en los gases no es válida esta suposición ya que la variación de densidad es grande.

En las tabla 5.1, se muestran las densidades de algunas sustancias y la densidad relativa de ellas respecto al agua, definida en la forma

$$\rho_r = \frac{\rho_{\text{sustancia}}}{\rho_{H_2O}}.$$

5.3.3. Variación de la presión con la profundidad

En esta sección, se desea determinar la relación general entre la presión p en cualquier punto del interior de un fluido situado en un campo gravitacional y a la profundidad h.

El fluido de la figura 5.10 se encuentra encerrado en un recipiente provisto de un émbolo hermético y móvil. La pregunta a responder es ¿Cuál es la presión en un punto arbitrario Q situado a una profundidad h por debajo de la parte superior del fluido?

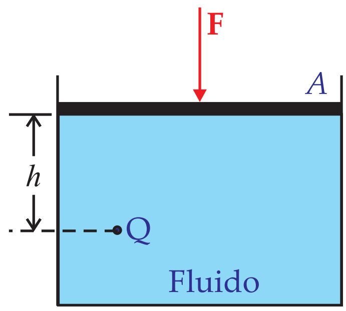


Figura 5.10: *Presión total en el interior de un fluido.*

La presión en el punto Q depende de dos fuentes, la primera tiene que ver con la fuerza externa $\mathbf{F}$ ejercida sobre el pistón de área A y la segunda con la fuerza hacia abajo ejercida por el fluido que se encuentra por encima del punto Q. Ambas dan lugar a presiones isótropas en el fluido, esto es, igual presión en todas las direcciones. De este modo, la presión p_Q en el punto Q, se puede expresar como la suma de dos términos, uno externo y otro interno, en la forma

$$p_Q = p_{\text{ext}} + p_{\text{int}},$$

donde la presión externa p_{ext} está dada por

$$p_{\text{ext}} = \frac{F}{A}.$$

La presión interna p_{int}, se puede obtener mediante el siguiente procedimiento.

Como el fluido se encuentra en reposo, necesariamente cualquier elemento de volumen se encuentra en reposo. Por ello, se considera el elemento en forma de lámina delgada representado en la figura 5.11, cuyo espesor es $\mathrm{d}y$ y cuyas caras superior e inferior tienen área a. Si ρ es la densidad del fluido, la masa del elemento es $\mathrm{d}m = \rho a \mathrm{d}y$ y su peso $\mathrm{d}W = \rho a g \mathrm{d}y$.

Ahora, la fuerza ejercida sobre el elemento por el fluido que lo rodea, en cualquier punto, es normal a la superficie. Por simetría, la fuerza horizontal resultante sobre los lados laterales es cero ya que está en reposo.

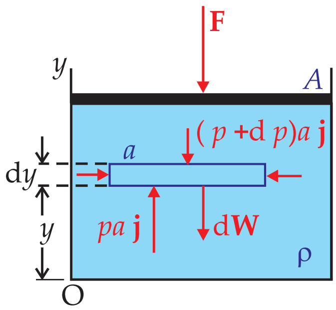


Figura 5.11: *Variación de la presión con la profundidad.*

En cuanto a la vertical se tiene

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y &= 0, \\ pa - (p + \mathrm{d}p)a - \rho g a \mathrm{d}y &= 0, \end{aligned}$$

donde al simplificar se encuentra que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p &= -\rho g \mathrm{d}y \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} &= -\rho g \end{aligned} \tag{5.13}$$

Como ρ y g son cantidades positivas, de la ecuación (5.13) se deduce que a una $\mathrm{d}y$ positiva (aumento de y) corresponde una $\mathrm{d}p$ negativa (disminución de p), y viceversa.

Si en la figura 5.12, p_1 y p_2 son las presiones a las alturas y_1 y y_2 respecto al origen de coordenadas, la ecuación (5.13) se puede transformar en

$$\int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p = -\rho g \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y,$$

donde luego de integrar y evaluar se obtiene

$$p_2 - p_1 = -\rho g (y_2 - y_1). \tag{5.14}$$

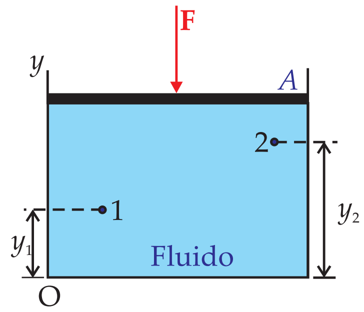


Figura 5.12: *Diferencia de presión entre 1 y 2.*

Para el caso de interés mostrado en la figura 5.13, con $y_2 - y_1 = h$, $p_1 = p_Q$ y $p_2 = p_{ext}$, la ecuación (5.14) adquiere la forma

$$\begin{aligned} p_{ext} - p_Q &= -\rho g h \\ p_Q &= p_{ext} + \rho g h, \end{aligned} \tag{5.15}$$

con

$$p_{int} = \rho g h.$$

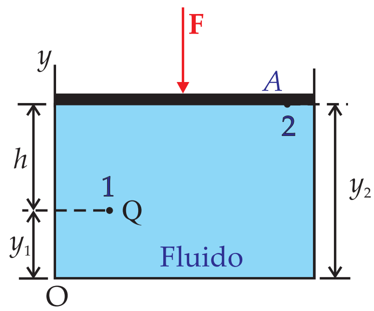


Figura 5.13: *Presión en el punto Q.*

Cuando se trata de un líquido contenido en un recipiente abierto, como en la figura 5.14 y de acuerdo con la ecuación (5.15), la presión externa es la presión atmosférica p_a y la presión interna en el punto de interés es p, esto es

$$p = p_a + \rho g h \tag{5.16}$$

En la ecuación (5.16) se observa que la forma del recipiente no influye en la presión y que esta sólo depende de la profundidad. Igualmente, se tiene que la presión externa p_a, es la misma a

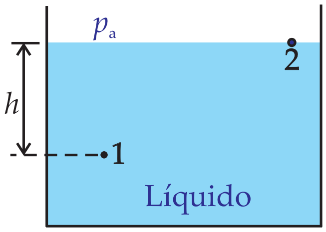


Figura 5.14: *Presión en el interior de un líquido.*

cualquier profundidad, como lo exige el principio de Pascal, es decir, en un fluido la presión varía con la profundidad debido a la fuerza gravitacional.

5.3.4. Presión en la interfase de dos fluidos

Para determinar la presión en la interfase dos fluidos, se considera el tubo en U como se ilustra en la figura 5.15.a, donde inicialmente se deposita un fluido de densidad ρ_1, y luego se deposita otro fluido de densidad menor ρ_2 en la rama izquierda del tubo, como se ilustra en la figura 5.15.b.

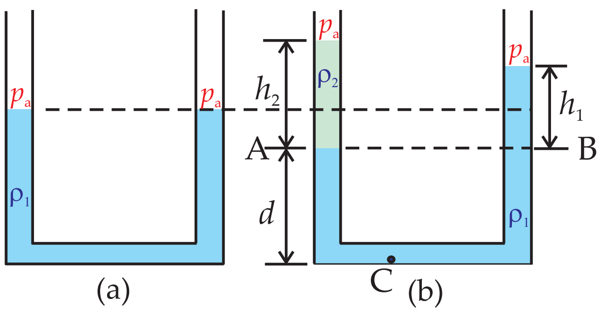


Figura 5.15: *Presión en la interfase de dos fluidos.*

Como la presión es independiente de la forma del recipiente, en todos los puntos de la base del tubo se debe tener el mismo valor. Por otro lado, en el punto C la presión es la misma independientemente que se considere la rama derecha o la rama izquierda de la figura 5.14.b, pues de lo contrario los dos líquidos estarían en movimiento. De este modo, de acuerdo con la ecuación (5.16), se satisface la igualdad

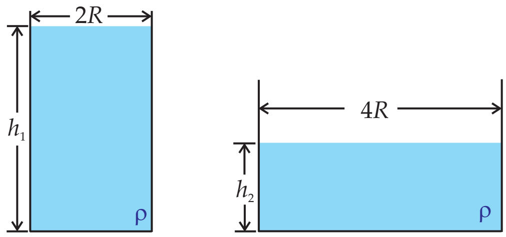
$$p_a + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g d = p_a + \rho_1 g h_1 + \rho_1 g d \quad (5.17)$$

donde al cancelar el término común a ambos lados de la igualdad en la ecuación (5.17), con $p_A = p_a + \rho_2 g h_2$ y $p_B = p_a + \rho_1 g h_1$, se obtiene

$$p_A = p_B,$$

por consiguiente, la presión al nivel de la interfase entre los dos fluidos, es la misma a ambos lados del tubo en U. Igualmente, este resultado es válido para puntos por debajo de la interfase que se encuentren a la misma altura respecto a base.

Ejemplo 5.1.
Igual cantidad de un líquido de densidad ρ se deposita en dos recipientes cilíndricos, uno de radio R y el otro de radio $2R$. Las alturas alcanzadas por el líquido son, respectivamente, h_1 y h_2. a) obtenga una relación entre las alturas h_1 y h_2. b) determine la relación entre las presiones ejercidas por el fluido en la base de los recipientes. c) Hallar la relación entre las fuerzas ejercidas por el fluido en la base de los recipientes. d) Encontrar el peso del fluido. Comparar el resultado con el obtenido en el numeral c).
Solución
Diagrama ilustrativo de la situación planteada.



a) Volumen de fluido, considerando el recipiente de radio R, está dado por

$$V_1 = \pi R^2 h_1, \quad (1)$$

y en el recipiente de radio $2R$, es

$$V_2 = 4\pi R^2 h_2. \quad (2)$$

Ahora, como la cantidad de líquido es la misma en ambos recipientes, al igualar las ecuaciones (1) y (2), se encuentra que la relación entre las alturas es

$$h_1 = 4h_2, \quad (3)$$

de donde se puede concluir que al duplicar el radio, la altura en dicho recipiente se reduce a la cuarta parte.

b) La presión, en la base de cada recipiente, es

$$P_1 = \rho g h_1, \tag{4}$$

y

$$P_2 = \tfrac{1}{4}\rho g h_1. \tag{5}$$

Así, mediante las ecuaciones (4) y (5), se encuentra que la relación entre las presiones es

$$P_1 = 4P_2, \tag{6}$$

donde de nuevo, al duplicar el radio, la presión en la base de dicho recipiente se reduce a la cuarta parte.

c) De acuerdo con la ecuación (5.2), la fuerza que el líquido ejerce sobre la base de cada recipiente es,

$$F_1 = \rho g \pi R^2 h_1, \tag{7}$$

$$F_2 = \rho g \pi R^2 h_1. \tag{8}$$

Comparando las ecuaciones (7) y (8), se tiene que la fuerza es la misma en la base de los dos recipientes, sólo que en el recipiente de radio R la fuerza está distribuida en un área menor, comparada con el área del recipiente de radio mayor $2R$.

Ejercicio 5.1.
Considere la situación planteada en el ejemplo 5.1. a) Encuentre el peso del líquido en función de h_1 y compare el resultado con la fuerza que éste ejerce sobre el fondo de los recipientes. b) Calcule los valores de h_1, h_2, p_1, p_2 y F_1, si el líquido es agua con un volumen de 3 litros y $R = 5\,\mathrm{cm}$

5.3.5. Medición de la presión

Barómetro de mercurio

Este dispositivo, que permite medir la presión atmosférica, consiste en un tubo largo de vidrio que se ha llenado completamente de mercurio y luego se ha invertido en una cubeta con mercurio, como en la figura 5.16. El espacio que se forma arriba de la columna de mercurio contiene sólo vapor de mercurio, cuya presión es tan pequeña a temperaturas ordinarias, que se puede despreciar.

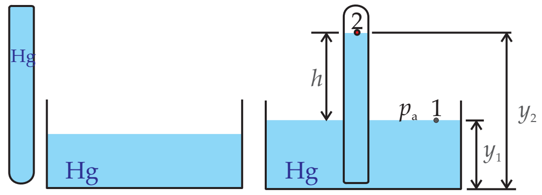


Figura 5.16: *Barómetro de mercurio.*

De acuerdo con la ecuación (5.14), para este caso, $y_2 - y_1 = h$, $p_1 = p_a$ y $p_2 = 0$. De este modo,

$$p_a = \rho g h,$$

donde p_a es la presión atmosférica.

La mayoría de los instrumentos que miden presiones, utilizan la presión atmosférica como nivel de referencia y miden la diferencia entre la presión real o absoluta y la presión atmosférica, llamándose a este valor *presión manométrica* o *diferencial*. La presión real, en un punto de un fluido, se llama *presión absoluta*. Es decir, en la expresión $p - p_a = \rho g h$, p es la presión absoluta y $p - p_a$ la presión manométrica o diferencial, que corresponde a la presión ejercida por el fluido. La presión manométrica se da ya sea sobre la presión atmosférica o debajo de ella.

Al nivel del mar, la columna de mercurio tendrá una altura cerca de $76\,\mathrm{cm} \equiv 760\,\mathrm{mm}$, variando con la presión atmosférica. Una presión equivalente a la ejercida por 760 mmHg a 0º en las condiciones de aceleración de la gravedad normal, $g = 980.665\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$, se llama una atmósfera (1 atm), esto es

$$1\,\mathrm{atm} \equiv 1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}.$$

Otras unidades de presión que también son utilizadas, se definen mediante las relaciones $1\,\mathrm{bar} \equiv 10^5\,\mathrm{Pa}$, $1\,\mathrm{lb\,pul^{-2}} \equiv 1\,\mathrm{psi} \equiv 6.9 \times 10^3\,\mathrm{Pa}$ y $1\,\mathrm{torr} \equiv 133.32\,\mathrm{Pa}$, que es la presión debida a una columna de mercurio de un milímetro de altura.

A menudo se especifican las presiones dando la altura de la columna de mercurio, que es el origen de la expresión *presión en mm Hg*; sin embargo, una presión es la relación de fuerza entre área y no es una longitud.

El manómetro

Es un dispositivo que permite medir la presión de un gas dentro de un recipiente, como el mostrado en la figura 5.17.

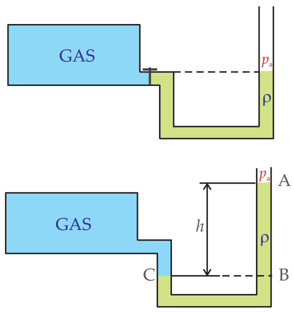


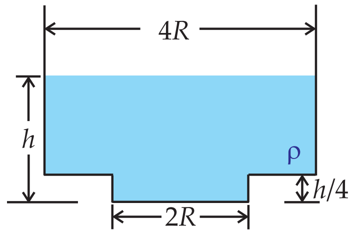
Figura 5.17: *Manómetro.*

Un tubo en forma de U contiene un líquido tal como mercurio, que se encuentra a distintos niveles en cada lado una vez que se abre la llave. La presión en el punto A es la presión atmosférica p_a, ya que el tubo es abierto por encima de A. Así, la presión en el punto B es $p_a + \rho g h$, donde ρ es la densidad del fluido manométrico. La presión en la interfase C es igual a la presión en el punto B, ya que están al mismo nivel. Por lo tanto, la presión de salida en el recipiente de la figura 5.17 es

$$p = p_a + \rho g h,$$

donde de nuevo p es la presión absoluta y $p - p_a = \rho g h$ es la presión manométrica o diferencial.

Ejemplo 5.2.
En el recipiente cilíndrico mostrado en la figura, se deposita un líquido de densidad ρ, hasta una altura h respecto a su base. a) Determine, en función de h, la presión manométrica y la presión absoluta sobre la base del recipiente. b) Compare el peso total del fluido con la fuerza que éste ejerce sobre la base del recipiente.
Solución
a) Como la presión sobre la superficie



libre del líquido corresponde a la presión atmosférica, se tiene que la presión manométrica sobre la base está dada por

$$p - p_a = \rho g h. \qquad (1)$$

De este modo, la presión absoluta es

$$p = p_a + \rho g h. \qquad (2)$$

De acuerdo con las ecuaciones (1) y (2), se tiene que la presión manométrica corresponde a la presión ejercida por el fluido, mientras que la absoluta se debe tanto al fluido como a la atmósfera terrestre.

b) El peso total del fluido, utilizando la ecuación (5.12), es

$$W = \tfrac{13}{4}\pi \rho g R^2 h. \qquad (3)$$

Por otro lado, con ayuda de la ecuación (5.2), la fuerza que el fluido ejerce sobre la base, es

$$F = \pi \rho g R^2 h. \qquad (4)$$

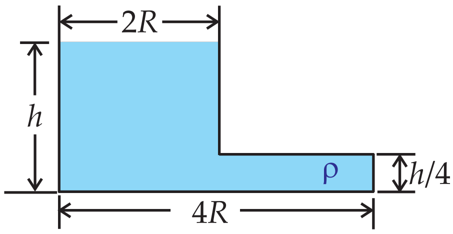
Mediante las ecuaciones (3) y (4), la relación entre el peso del fluido y la fuerza que éste ejerce sobre la base, es de la forma

$$W = \tfrac{13}{4} F. \qquad (5)$$

Este resultado muestra que el peso del fluido es mayor que la fuerza ejercida sobre la base del recipiente. La diferencia radica en que la fuerza de presión depende tanto del área de la base, como de la altura del líquido sobre ella, mientras que el peso tiene que ver con la cantidad total de fluido que se ha depositado en el recipiente. Desde otro punto de vista, la fuerza de presión la ejerce el fluido a una profundidad h sobre la base de radio R, mientras que el peso es la fuerza que la tierra ejerce sobre todo el fluido.

Ejercicio 5.2.
Resuelva el ejemplo 5.2, suponiendo que

el recipiente cilíndrico tiene la forma mostrada en la figura. Compare sus resultados con los obtenidos en el ejemplo 5.2.



5.3.6. Principio de Arquímedes

El empuje de los líquidos es un fenómeno muy conocido. Un cuerpo sumergido en agua parece pesar menos que en aire, y un cuerpo cuya densidad media es menor que la del fluido en que está sumergido puede flotar en él. Son ejemplos de este fenómeno un globo lleno de helio en el aire, un pedazo de corcho en agua, hielo en agua. Así, cuando un cuerpo está total o parcialmente sumergido en un fluido (ya sea líquido o gas) en reposo, el fluido ejerce una presión sobre todas las partes de la superficie del cuerpo en contacto con el fluido. De acuerdo con el resultado obtenido en sección 5.2.5, la presión es mayor en las porciones sumergidas a mayor profundidad, por ello, la resultante de todas las fuerzas de presión es una fuerza ascendente llamada *fuerza de flotación* del cuerpo sumergido. Se puede determinar la magnitud y dirección de esta fuerza resultante de una manera simple, mediante el *principio de Arquímedes* que es, al igual que el principio de Pascal, una consecuencia de las leyes de la estática de fluidos.

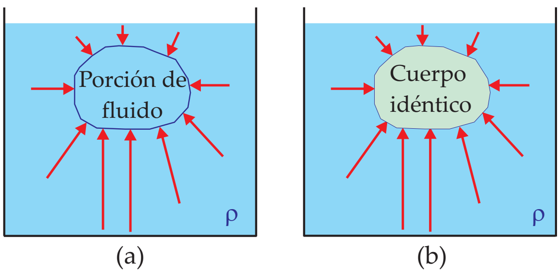


Figura 5.18: *Fuerza de flotación.*

Se considera una porción de un fluido en reposo de forma arbitraria. El contorno irregular de la figura 5.18.(a) representa la superficie que limita esta porción del fluido. Las flechas representan las fuerzas ejercidas por el fluido envolvente sobre pequeños elementos de la superficie límite. Como todo el fluido está en reposo, la componente horizontal de la resultante de estas fuerzas superficiales es nula. En cambio, la componente vertical de la resultante $F_\mathrm{v} = B = E$, ha de ser compensada por la magnitud del peso mg del fluido contenido dentro de dicha superficie y su línea de acción ha de pasar por el centro de gravedad de la porción de fluido, es decir,

$$F_\mathrm{v} = m_\mathrm{f} g = \rho V_\mathrm{f} g, \tag{5.18}$$

donde m_f es la masa de la porción de fluido y V_f su volumen.

Como la presión en cada punto de la superficie de un cuerpo sumergido en un fluido, no depende del material que está hecho el cuerpo sino de la profundidad, al reemplazar la porción de fluido por un cuerpo sólido, figura 5.18.(b), de forma y volumen exactamente igual a la de la porción de fluido considerada, la presión en cada punto será exactamente la misma que antes, esto es, la fuerza ejercida sobre el sólido por el fluido envolvente permanecerá inalterada y, por lo tanto, será igual al peso $m_\mathrm{f} g$ del fluido desalojado o desplazado por dicho cuerpo. La única diferencia es que la línea de acción de esta fuerza pasa por el centro de gravedad del fluido desalojado, que no coincide necesariamente con el centro de masa del cuerpo. De este resultado se deduce el principio de Arquímedes que se expresa en la forma

Un cuerpo, que está parcial o totalmente sumergido en un fluido, es empujado hacia arriba por una fuerza de módulo igual al peso del fluido desalojado y dirigida verticalmente según una línea que pasa a través del centro de gravedad del fluido desalojado.

De este modo, teniendo en cuenta la ecuación (5.18), el empuje debido al principio de Arquímedes se expresa por

$$B = \rho_\mathrm{f} V_\mathrm{s} g,$$

donde B es el empuje o fuerza ejercida por el fluido sobre el cuerpo, ρ_f la densidad del fluido y V_s el volumen de fluido que ha desalojado o desplazado el cuerpo. Este volumen no siempre coincide con el volumen total del cuerpo, ya que este puede estar parcialmente sumergido.

Para mayor claridad se analiza lo que ocurre cuando un globo flota en el aire y cuando un submarino flota a cierta profundidad bajo el agua.

El peso del globo que flota en el aire, de acuerdo con el principio de Arquímedes, es igual al peso del volumen de aire, que en este caso es idéntico al volumen del globo; es decir, la densidad media del globo es igual a la del aire a la altura que se encuentra el globo. Ahora si la densidad media es menor, el globo asciende y viceversa.

Por otro lado, el peso del submarino que flota a cierta profundidad bajo el agua, es igual al peso del volumen de agua, idéntico al volumen del submarino; así, la densidad media del submarino es igual a la densidad del agua a esa profundidad. En forma idéntica, si la densidad media es mayor, el submarino desciende y viceversa.

Un cuerpo cuya densidad media sea inferior que la densidad de un líquido puede flotar parcialmente sumergido en la superficie libre de dicho líquido; por ejemplo, hielo o madera en agua.

Se sabe entonces que el empuje obra verticalmente hacia arriba pasando por el centro de gravedad del fluido antes de ser desalojado; al punto correspondiente en el cuerpo sumergido se le conoce como *centro de flotación*.

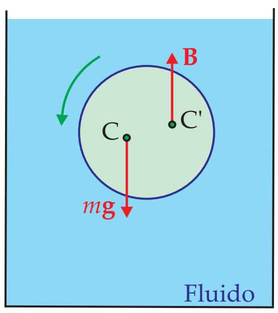
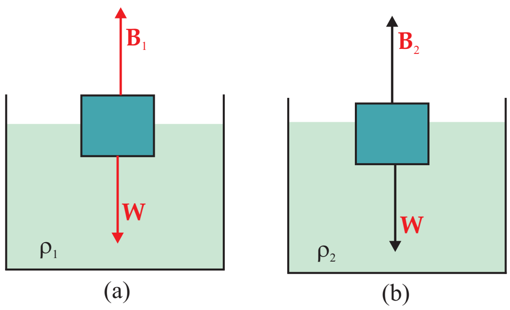


Figura 5.19: *Rotación de un cuerpo que desciende en un fluido.*

Cuando un cuerpo se sumerge en un fluido, no permanecerá necesariamente en equilibrio estático, ya que su peso puede ser mayor, menor o igual a B. Además, si no es homogéneo, su centro de gravedad puede no encontrarse sobre la línea de acción de B. Por lo tanto, como caso general, estará sometido a una fuerza resultante que pasa por su propio centro de gravedad y a un torque, y se elevará o descenderá girando a la vez, como se muestra en la figura 5.19 donde C es el centro de gravedad del cuerpo y C' su centro de flotación.

Ejemplo 5.3.
Cuando un cubo de madera de lado a, se sumerge en un líquido de densidad ρ_1, la mitad de su volumen queda sumergido. Cuando el mismo cubo se introduce en otro líquido de densidad ρ_2, la tercera parte de su volumen queda por fuera de él. Determine la relación entre las densidades de los líquidos.
Solución
Diagrama de cuerpo libre para el bloque, cuando se sumerge en cada líquido.



Ecuaciones de equilibrio estático para el bloque.

Bloque en la figura (a)

$$+\uparrow \sum F_y = 0:$$

$$B_1 - W = 0. \qquad (1)$$

Bloque en la figura (b)

$$+\uparrow \sum F_y = 0:$$

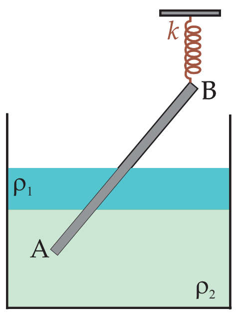
$$B_2 - W = 0. \qquad (2)$$

Mediante el principio de Arquímedes y utilizando las ecuaciones (1) y (2), se obtiene

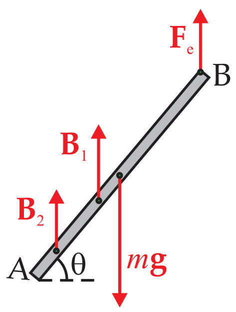
$$\rho_1 = \tfrac{4}{3}\rho_2.$$

Ejercicio 5.3.
Teniendo en cuenta el ejemplo 5.3, calcule la densidad de los líquidos si la densidad de la madera es $0.5\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ y la arista del cubo es igual a $2\,\mathrm{cm}$. Dar su respuesta en el sistema de unidades SI.

Ejemplo 5.4.
Como se muestra en la figura, la mitad de una varilla cilíndrica, de longitud L y radio a, se encuentra en el interior de un recipiente que contiene dos líquidos inmiscibles de densidades ρ_1 y ρ_2 . La cuarta parte del volumen de la varilla, está inmersa en el líquido de densidad mayor. La varilla está suspendida del techo mediante un resorte de constante k. Determine a) La densidad de la varilla, en función de ρ_1 y ρ_2. b) La deformación del resorte, en función de ρ_1 y ρ_2.



Solución
Diagrama de cuerpo libre para la varilla



Ecuaciones de equilibrio estático para la varilla, considerada como un cuerpo rígido.

$$+\uparrow \sum F_y = 0,$$

$$B_1 + B_2 + F_e - mg = 0. \qquad (1)$$

$$\sum \tau_B = 0,$$

$$mg\tfrac{1}{2}L\cos\theta - B_1\tfrac{5}{8}L\cos\theta - B_2\tfrac{7}{8}L\cos\theta = 0, \qquad (2)$$

donde se ha tomado el sentido antihorario como positivo.

a) *Densidad de la varilla*: De acuerdo con el principio de Arquímedes, se tiene,

$$B_1 = \tfrac{1}{4}V_v g\rho_1 \quad \text{y} \quad B_2 = \tfrac{1}{4}V_v g\rho_2, \qquad (3)$$

donde V_v es el volumen de la varilla.

Mediante las ecuaciones (2) y (3), se encuentra que la densidad del material de la varilla es

$$\rho_v = \tfrac{1}{16}(5\rho_1 + 7\rho_2). \qquad (4)$$

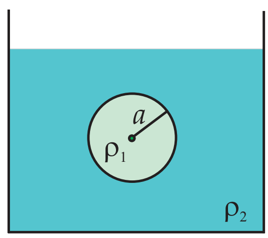
b) *Deformación del resorte*: Con ayuda de las ecuaciones (1), (3) y (4), se obtiene

$$x = \frac{\pi a^2 gL}{16k}(\rho_1 + 3\rho_2)$$

De acuerdo con los resultados obtenidos para la densidad de la varilla y la deformación del resorte, la única restricción es $\rho_1 < \rho_2$. ¿Por qué?

Ejercicio 5.4.
En el ejemplo 5.4, calcule el peso de la varilla y la deformación del resorte si $a = 0.5\,\mathrm{cm}$, $L = 0.6\,\mathrm{m}$, $k = 100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ y los líquidos son mercurio y glicerina.

Ejemplo 5.5.
Como se ilustra en la figura, una esfera homogénea de densidad ρ_1 se sostiene en el interior de un recipiente que contiene un líquido de densidad ρ_2. Determine la aceleración de la esfera, una vez que es soltada.

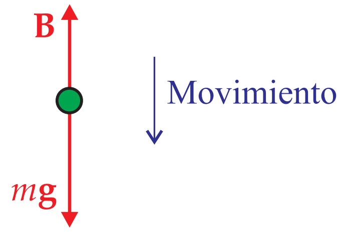


Solución
Diagrama de cuerpo libre para la esfera.

Ecuación de movimiento para la esfera.

Suponiendo que la esfera inicia su movimiento verticalmente hacia abajo, se tiene

$$+\downarrow \sum F_y = ma:$$



$$mg - B = ma, \qquad (1)$$

donde m es la masa de la esfera.

Además, la masa de la esfera y la fuerza que ejerce el líquido sobre ella, están dadas respectivamente por

$$m = \rho_1 V_e \quad \text{y} \quad B = \rho_2 V_e g, \qquad (2)$$

con V_e volumen de la esfera.

Mediante las ecuaciones (1) y (2), para la aceleración de la esfera se encuentra la expresión

$$a = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} g. \qquad (3)$$

Como es de esperarse, la magnitud de la aceleración de la esfera es menor que la aceleración de la gravedad, ya que el líquido impide que descienda en cada libre.

Por otro lado, al comparar las densidades se tiene que si $\rho_1 > \rho_2$ la esfera desciende verticalmente, mientras que en el caso $\rho_1 < \rho_2$, la esfera asciende verticalmente luego de ser soltada. En el caso $\rho_1 < \rho_2$, la ecuación (3) sólo se satisface mientras la esfera permanezca completamente sumergida. ¿Por qué?

Un tercer caso se presenta cuando $\rho_1 = \rho_2$, lo que genera una aceleración cero y lleva a que la esfera permanezca en el lugar que se coloque.

Ejercicio 5.5.
En el ejemplo 5.5, calcule la aceleración de la esfera, si: a) El líquido es agua y la esfera es de: i) platino, ii) oro, iii) cobre, iv) aluminio y v) vidrio. b) La esfera es de plomo y el líquido es: i) mercurio, ii) glicerina, iii) agua de mar, iv) aceite de oliva y v) Gasolina. Compare los resultados obtenidos.

5.4. Dinámica de fluidos

En las secciones anteriores se consideraron fluidos en reposo, es decir, se analizó el comportamiento de fluidos estáticos y de cuerpos total o parcialmente sumergidos en estos fluidos. En lo que sigue, se considera el movimiento de fluidos, esto es, se estudia la dinámica de fluidos que es una de las ramas más complejas de la mecánica. Como un fluido está compuesto de muchas partículas, donde cada una de ellas cumple con las leyes de Newton, se hace difícil analizar su movimiento ya que las ecuaciones resultantes son extremadamente complicadas, como ocurre por ejemplo, en el caso de una cascada de agua o en el de las volutas de humo.

Sin embargo, a pesar de la complejidad que se presenta en estas situaciones, muchos casos de importancia práctica se pueden representar por modelos ideales bastante sencillos los cuales permiten un análisis fisco detallado.

Hay una forma de abordar el problema, conveniente para la mayoría de los fines. En ella se abandona el propósito de especificar la trayectoria de cada partícula de fluido y en cambio se especifica la *densidad* y la *velocidad* del fluido en cada punto del espacio y en cada instante. Mediante este método simple, que se seguirá aquí, se describe el movimiento del fluido especificando la densidad $\rho(x,y,z)$ y la velocidad $v(x,y,z)$ en el punto (x,y,z) y en el instante t. Así, se enfoca la atención en lo que ocurre en cierto punto del espacio, en un determinado momento, más bien que en lo que le está ocurriendo a una partícula determinada del fluido. Cualquier cantidad que se emplee para describir el estado del fluido, por ejemplo la presión p, tendrá un valor definido en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo. Aun cuando esta descripción del movimiento de un fluido, enfoca la atención en un punto del espacio, más bien que en una partícula del fluido, no se puede evitar seguir las partículas mismas al menos durante cortos intervalos de tiempo dt, ya que al fin y al cabo, es a las partículas y no a los puntos del espacio, a quienes se aplican las leyes de la mecánica.

Para estudiar la naturaleza de estas simplificaciones, primero se consideran algunas características generales de los fluidos, que permiten definir el modelo que se utilizará en adelante, conocido como *fluido perfecto*, y definido como aquel cuyo flujo es de régimen estable, irrotacional, incomprensible y no viscoso, características que se consideran en lo que sigue.

Flujo en régimen estable o estacionario

En régimen estable o estacionario, la velocidad de una partícula, en un punto dado cualquiera, es la misma al transcurrir el tiempo. Así, toda partícula que pase por el punto A de la figura 5.20, adquiere la velocidad $\mathbf{v}$. Igualmente, toda partícula que pase por el punto B, adquiere la velocidad $\mathbf{v}'$.

En otras palabras, la velocidad de una partícula puede cambiar entre un punto y otro, pero en un punto específico, toda partícula que por allí pase adquiere exactamente la misma velocidad en magnitud y dirección.

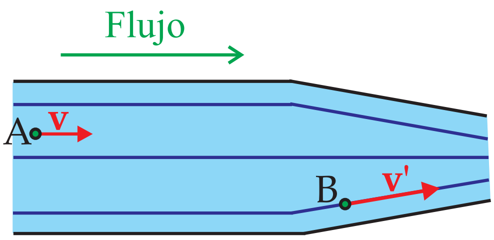


Figura 5.20: *Flujo de un fluido en regimen estable.*

La condición de régimen estable se puede lograr cuando la velocidad del fluido es reducida; por ejemplo, cuando una corriente de agua fluye suavemente.

Flujo en régimen inestable o no estacionario

El movimiento del fluido, en este caso, es tal que las velocidades sí son funciones del tiempo, es decir, a diferencia del caso anterior, las partículas de fluido que pasen por un punto determinado, adquieren diferentes velocidades sin importar la velocidad de la primera partícula que por allí pasó. Un ejemplo es el movimiento de marea, o en el caso del flujo turbulento, tal como una cascada, donde las velocidades varían irregularmente de un punto a otro, así como de un instante a otro.

Flujo irrotacional de un fluido

Si ningún elemento del fluido, posee una velocidad angular neta, esto es, no rota, se dice que se ha alcanzado un flujo irrotacional.

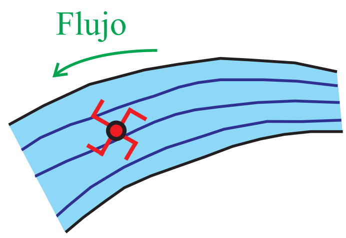


Figura 5.21: *Flujo irrotacional de un fluido.*

Es decir, si la pequeña rueda con aspas de la figura 5.21, colocada en el interior del fluido, se *mueve sin girar*, el movimiento es irrotacional. El flujo irrotacional es importante sobre todo porque conduce a problemas matemáticos simples. En tal caso, el movimiento angular no interviene y la forma de la velocidad es relativamente simple.

Flujo rotacional de un fluido

Cuando la rueda con aspas, de la figura 5.21, adquiere una velocidad angular diferente de cero, se tiene un flujo rotacional. El flujo rotacional incluye movimiento de *vórtice*, como en el caso donde se presentan remolinos. Esto también incluye movimientos en los cuales el vector velocidad varía en dirección transversal.

Flujo compresible e incompresible de un fluido

Generalmente se considera que los líquidos tienen un flujo incompresible o de densidad constante. Pero hasta un gas altamente compresible puede experimentar algunas veces cambios de densidad pequeños, tales que su flujo es prácticamente incompresible. En vuelos a velocidades muy inferiores a la velocidad del sonido en el aire ($340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$), el movimiento del aire con respecto a las alas es de fluido casi incompresible. En estos casos la densidad ρ es constante e independiente de x, y, z y t y el estudio del flujo de ese fluido se simplifica considerablemente. Así, un gas puede tratarse como incompresible si su movimiento es tal que las diferencias de presión no son grandes.

Flujo viscoso y no viscoso de un fluido

Como se vio en la unidad 2, la viscosidad es un fenómeno análogo al rozamiento que se presenta en el movimiento de sólidos sobre superficies rugosas. En muchos casos, tales como en problemas de lubricación, es sumamente importante aunque algunas veces es insignificante. La viscosidad, en el movimiento de fluidos, introduce fuerzas tangenciales entre las capas de fluido en movimiento relativo y da lugar a pérdida de energía mecánica.

Cuando el fluido es no viscoso, la velocidad en todos los puntos de una sección transversal determinada es la misma.

En lo que sigue, se trata únicamente el *fluido ideal* o *perfecto*, que como fue definido antes, es aquel cuyo flujo es de *régimen estable*, *irrotacional*, *incompresible* y *no viscoso*.

Aunque con esto se puede simplificar demasiado, se verá que este análisis restringido tiene amplias aplicaciones en situaciones prácticas.

5.4.1. Línea de flujo y línea de corriente

Como se ilustra en la figura 5.22, la trayectoria descrita por cualquier elemento de un fluido en movimiento, se denomina *línea de flujo*. En general, la velocidad del elemento de fluido varía punto a punto en magnitud y en dirección a lo largo de ella.

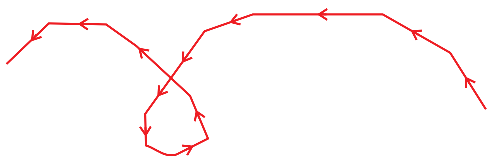


Figura 5.22: *Línea de flujo.*

Por otro lado, si cada elemento de fluido que pasa por un punto dado, sigue la misma línea de flujo que los elementos precedentes, se tiene un flujo de régimen estable o estacionario. Necesariamente, cuando se inicia un flujo determinado, pasa por un estado no estacionario, pero en muchos casos se puede hacer estacionario al cabo de cierto tiempo.

Así, en el flujo de régimen estable la velocidad $\mathbf{v}$ en un punto dado es constante, esto es, toda partícula que pase por ese punto adquiere la misma velocidad.

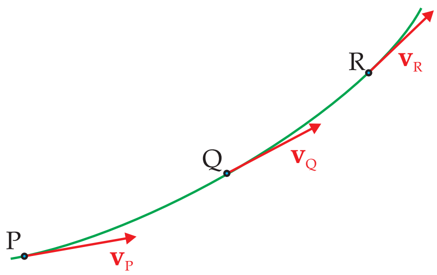


Figura 5.23: *Línea de corriente.*

Si en el interior de un fluido se considera un punto P, figura 5.23, se tiene que $\mathbf{v}_P$ no cambia al transcurrir el tiempo, estos es, toda partícula que llegue a P adquiere la velocidad $\mathbf{v}_P$ (magnitud y dirección). La misma situación se presenta en los puntos Q y R, donde la velocidad de una partícula concreta del fluido puede ser diferente, pero en cada punto es constante. Por lo tanto, si se traza la trayectoria de la primera partícula que pasó por P, como en la figura 5.23, esa curva será la trayectoria de toda partícula que llegue a P. Esta curva se llama *línea de corriente* y es una curva cuya tangente, en un punto cualquiera, tiene la dirección de la velocidad del fluido en ese punto. De acuerdo con estas definiciones, en régimen estacionario, las líneas de corriente coinciden con las líneas de flujo.

Como consecuencia de lo anterior, se tiene que dos líneas de corriente nunca se pueden cruzar, ya que si lo hacen, una partícula de fluido que allí llegara podría adquirir una de las dos velocidades y seguiría ya sea por una línea o por la otra y entonces el fluido no sería de régimen estable. Esta situación se ilustra en la figura 5.24.

En el flujo de un fluido en régimen estable, el mapa de las líneas de corriente permanece inal-

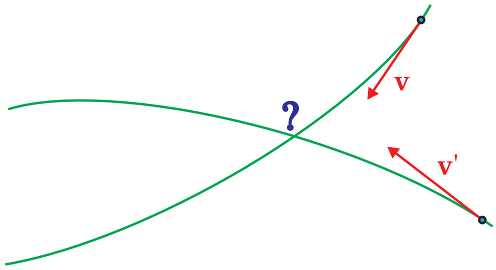


Figura 5.24: *Dos líneas de corriente nunca se cruzan.*

terado al transcurrir el tiempo, ya que en cada punto se tiene una velocidad determinada.

5.4.2. Tubo de flujo

Se considera un flujo de régimen estable y se dibujan todas las líneas de corriente que pasan por la periferia de una superficie, como la sección transversal A de la figura 5.25; este conjunto de líneas de corriente rodea un tubo llamado *tubo de flujo*. En virtud de la definición de línea de corriente, el fluido no puede atravesar las paredes de un tubo de flujo; esto es, en régimen estacionario no puede haber mezcla de fluidos de tubos de flujo diferentes, de este modo, el tubo se comporta como si fuera una tubería de la misma forma. En otras palabras, el fluido que entra por un extremo del tubo de flujo debe salir por el otro.

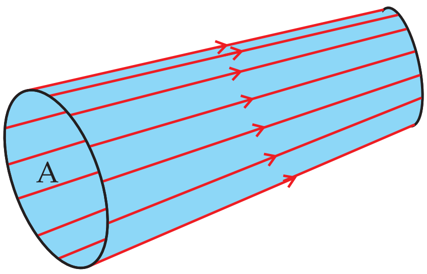


Figura 5.25: *Tubo de flujo.*

5.5. Ecuación de continuidad

Con el fin de obtener la ecuación de continuidad, se considera la figura 5.26 donde se ha trazado un tubo de flujo entre las secciones P y Q.

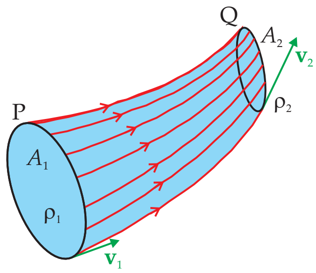


Figura 5.26: *Ecuación de continuidad.*

Para el flujo de un fluido en régimen estable, irrotacional, incompresible y no viscoso, la ecuación de continuidad se puede obtener de la siguiente forma. La velocidad del fluido en el interior, aun cuando es paralela al tubo en un punto cualquiera, puede tener magnitudes diferentes en diferentes puntos. Se considera entonces que $\mathbf{v}_1$ es la velocidad de las partículas que pasan por la región P y $\mathbf{v}_2$ la velocidad de las partículas en la región Q.

Además, las secciones transversales de los tubos, perpendiculares a las líneas de corriente en los puntos P y Q, tienen respectivamente áreas A_1 y A_2 . En un pequeño intervalo de tiempo Δt, un elemento de fluido recorre aproximadamente la distancia $v_1 \Delta t$. Entonces, la masa de fluido Δm, que cruza A_1 en el intervalo de tiempo Δt es aproximadamente

$$\Delta m \approx \rho_1 A_1 v_1 \Delta t,$$

o sea que la masa por unidad de tiempo o flujo de masa por la región P es

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \rho_1 A_1 v_1.$$

Se debe tomar Δt suficientemente pequeño para que en ese intervalo de tiempo v_1 y A_1 no cambien apreciablemente en la distancia que recorre el fluido. En el límite, $\Delta t \to 0$, se obtienen las definiciones precisas

Flujo de masa en P

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}|_{A_1} = \rho_1 A_1 v_1.$$

Flujo de masa en Q

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}|_{A_2} = \rho_2 A_2 v_2.$$

En las expresiones anteriores, ρ_1 y ρ_2 son las densidades del fluido en las regiones P y Q, respectivamente.

Como no puede salir fluido por las paredes laterales del tubo de flujo y puesto que no hay fuentes ni sumideros en los que se pueda crear o destruir fluido en el interior del tubo, la masa que cruza cada sección del tubo por unidad de tiempo, debe ser la misma. Lo anterior, debe ser así, ya que el volumen comprendido entre A_1 y A_2 es constante. Así, el flujo de masa por P debe ser igual al flujo de masa en Q, es decir,

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}|_{A_1} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}|_{A_2} \qquad \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2, \tag{5.19}$$

de donde el producto $\rho A v$ = Constante a lo largo de cualquier tubo de flujo dado, pues las secciones elegidas son completamente arbitrarias. Este resultado expresa la *ley de conservación de la masa* en la dinámica de fluidos.

Adicionalmente como el fluido es incompresible, se tiene que $\rho_1 = \rho_2$, por lo que la ecuación (5.19) se convierte en

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \tag{5.20}$$

es decir, el producto Av = Constante y la ecuación (5.20) corresponde a la ecuación de continuidad para un fluido ideal.

El producto Av (volumen /tiempo) da el flujo de volumen, rapidez de flujo, caudal o gasto como se denomina a menudo. De acuerdo con esta expresión, se tiene que en un flujo de régimen estable, irrotacional, incompresible y no viscoso, la velocidad de flujo varía en razón inversa al área de la sección transversal, siendo mayor donde la sección del tubo disminuye, como ocurre en el estrechamiento de la figura 5.27, donde $v_1 < v_2$. Esto se comprueba fácilmente introduciendo pequeñas partículas en el fluido y observando su movimiento, a través de una tubería que tenga una sección transversal variable.

El hecho que el producto Av permanezca constante a lo largo del tubo de flujo, permite

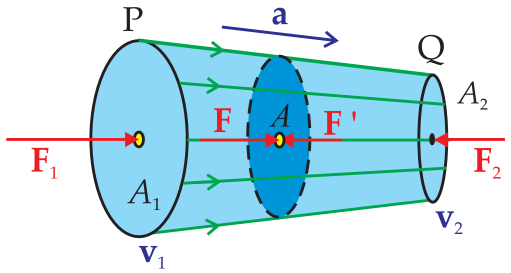


Figura 5.27: *Fuerzas de un fluido en un tubo horizontal.*

dar cierta interpretación al mapa de líneas de corriente. En una parte angosta, región Q de la figura 5.27, las líneas de corriente deben estar más próximas entre sí que en una parte ancha, región P de la figura 5.27. Por consiguiente, conforme disminuye la distancia entre líneas de corriente, la magnitud de la velocidad del fluido debe aumentar. Así, se llega a la conclusión que líneas de corriente muy espaciadas indican regiones de baja velocidad, y líneas de corriente muy próximas representan regiones de alta velocidad.

Se obtiene otro resultado importante cuando se aplica la segunda ley de Newton al flujo del fluido entre las regiones P y Q de la figura 5.27. Una partícula de fluido, que en P tiene una velocidad de magnitud v_1, debe aumentar su velocidad a medida que avanza hasta adquirir en Q la velocidad mayor v_2. Este aumento de velocidad proviene, bien sea de una diferencia de presión que obre sobre la partícula de fluido que va de P a Q o de la acción de la gravedad. En el caso de un tubo de flujo horizontal, la fuerza gravitacional no genera variaciones de presión ya que no se presentan diferencias de altura en la línea de corriente central. Como se muestra a continuación, en el flujo horizontal y de régimen estable, la presión es máxima donde la velocidad es mínima. Esto se puede entender más fácilmente como sigue.

Como $v_1 < v_2$, entonces se tiene una aceleración en el sentido de P a Q. Además el fluido a la izquierda de la sección A_1 ejerce una fuerza de magnitud F_1 sobre A_1 y el fluido a la derecha de la sección A_2 ejerce una fuerza de magnitud F_2 sobre A_2. De acuerdo con la segunda ley de

Newton la fuerza neta tiene el sentido de la aceleración, es decir

$$F_1 > F_2 \quad \text{ó} \quad \frac{F_1}{F_2} > 1.$$

Finalmente, al tomar la sección de área A mostrada en la figura 5.27, la presión ejercida por el fluido a la izquierda es $p = F/A$ y la presión ejercida por el fluido a la derecha es $p' = F'/A$, de este modo, con $F > F'$ se obtiene

$$\frac{F}{A} > \frac{F'}{A} \quad \text{ó} \quad p > p' \tag{5.21}$$

Por lo tanto, de la ecuación (5.21) se puede concluir que la presión en los estrechamientos es menor que en los ensanchamientos.

5.6. Ecuación de Bernoulli

Cuando un fluido incompresible fluye a lo largo de un tubo horizontal de sección transversal variable, figura 5.28, su velocidad cambia como lo exige la ecuación de continuidad.

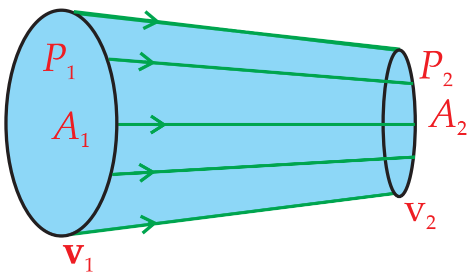


Figura 5.28: *Flujo de un fluido en un tubo horizontal.*

Para generar esta aceleración, de acuerdo con la sección 5.4, es necesaria una fuerza y para que esta se origine por el fluido que rodea a una porción del mismo, la presión debe variar en diferentes zonas del tubo de flujo. Si la presión fuera constante a lo largo del tubo, la fuerza neta ejercida sobre cualquier porción de fluido sería cero. Por lo tanto, cuando la sección del tubo cambia, la presión debe variar a lo largo de él, aunque no exista diferencia de altura, ya que si la altura también varía, se presenta una diferencia de presión adicional, como en la figura 5.29.

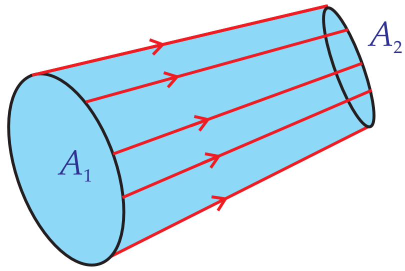


Figura 5.29: *Flujo de un fluido en un tubo inclinado.*

La ecuación de Bernoulli, que es una relación fundamental en la mecánica de fluidos, no es un nuevo principio sino que se puede derivar de las leyes fundamentales de la mecánica de Newton. Dicha ecuación es una expresión general que relaciona la diferencia de presión entre dos puntos de un tubo de flujo, tanto con las variaciones de velocidad como con las variaciones de altura.

Como se verá a continuación, la ecuación de Bernoulli es esencialmente un enunciado del teorema del trabajo y la energía para el flujo de fluidos; por esta razón, en su deducción se aplica el teorema del trabajo y la energía al flujo contenido en una sección de un tubo de flujo, como el mostrado en la figura 5.30.

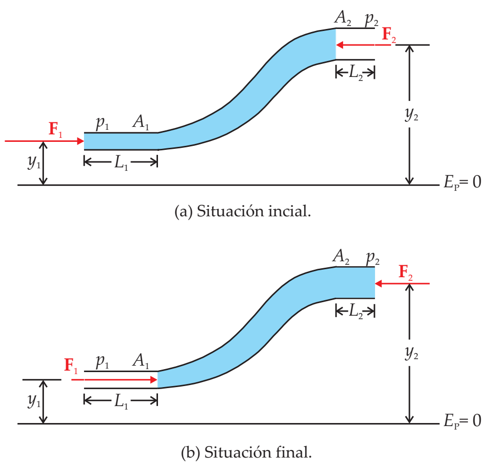


Figura 5.30: *Flujo de un fluido en una porción de tubería.*

Se considera que el flujo del fluido por una tubería o tubo de flujo, es de régimen estable, incompresible y no viscoso. La porción de la tubería que se muestra en la figura 5.30, tiene a la izquierda una sección transversal uniforme de área A_1, donde es horizontal y está a una altura y_1 respecto a algún sistema de referencia inercial. Gradualmente se ensancha levantándose a la derecha hasta un región horizontal ubicada a una altura y_2, donde tiene una sección transversal uniforme de área A_2. En lo que sigue, se concentra la atención en la porción de fluido sombreado y se toma a este fluido como el *sistema*. Se considera entonces el movimiento del sistema de la situación inicial, figura 5.30.(a), a la situación final, figura 5.30.(b). En todos los puntos de la parte angosta de la tubería, la presión es p_1 y la magnitud de la velocidad v_1 y en todos los puntos de la porción ancha, la presión es p_2 y la magnitud de la velocidad v_2.

De acuerdo con el teorema del trabajo y la energía, se tiene que *el trabajo efectuado por la fuerza resultante que actúa sobre un sistema, es igual al cambio de la energía cinética del sistema*, es decir

$$W = \Delta E_{\mathrm{k}}. \tag{5.22}$$

En la figura 5.30, las fuerzas externas que realizan trabajo sobre el sistema, están dadas por la fuerza de presión de magnitud $F_1 = p_1 A_1$ ejercida por el fluido que se encuentra a la izquierda del extremo horizontal inferior de la tubería; la fuerza de presión con magnitud $F_2 = p_2 A_2$ ejercida por el fluido que hay a la derecha del extremo horizontal superior; y la fuerza de gravedad que corresponde al peso del fluido.

Ahora, conforme se mueve el fluido por el tubo, el efecto neto es elevar la cantidad de fluido en la porción horizontal izquierda, representado en la figura 5.30 (a), a la posición del fluido en la porción horizontal derecha, mostrado en la figura 5.30 (b). La cantidad de fluido, entre estas dos regiones horizontales, permanece inalterado, esto es, se comporta como si se encontrara estático. Por consiguiente, el trabajo W realizado por la fuerza resultante sobre el sistema, se puede obtener como sigue.

- El trabajo W_1 efectuado sobre el sistema por la fuerza de presión de magnitud $F_1 = p_1 A_1$ es

$$W_1 = p_1 A_1 L_1. \tag{5.23}$$

- El trabajo W_2 realizado sobre el sistema por la fuerza de presión con magnitud $F_2 = p_2 A_2$ es

$$W_2 = -p_2 A_2 L_2, \tag{5.24}$$

donde el signo menos se debe al hecho que mientras la fuerza $F_2 = p_2 A_2$ actúa hacia la izquierda, el fluido se desplaza hacia la derecha.

- El trabajo efectuado sobre el sistema, por el peso del fluido de la región horizontal izquierda, está relacionado con elevar dicho fluido desde la altura y_1 hasta la altura y_2. Pero como se trata de una fuerza conservativa, es válida la expresión

$$\begin{aligned} W_3 &= -\Delta E_{\mathrm{p}} \\ &= -mg(y_2 - y_1), \end{aligned} \tag{5.25}$$

siendo m la masa del fluido contenida en cualquiera de las dos regiones horizontales sombreadas.

Así, el trabajo W realizado por la fuerza resultante sobre el sistema, está dado por la suma de los tres trabajos obtenidos en las ecuaciones (5.23), (5.24) y (5.25), esto es

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + W_3 \\ &= p_1 A_1 L_1 - p_2 A_2 L_2 - mg(y_2 - y_1). \end{aligned} \tag{5.26}$$

Como la cantidad de fluido, en las porciones horizontales de la tubería, es la misma para las situaciones mostradas en las figuras 5.30 (a) y (b), se tiene que $A_1 L_1 = A_2 L_2$ lo que corresponde al volumen de esta porción de fluido. Este volumen, de acuerdo con la ecuación 5.10, se puede expresar como m/ρ, donde ρ es la densidad del fluido que se toma constante, ya que el flujo es incompresible. Con esto, la ecuación (5.23) se transforma en

$$W = (p_1 - p_2)\frac{m}{\rho} - mg(y_2 - y_1). \tag{5.27}$$

Por otro lado, el cambio en la energía cinética, de la porción de fluido considerada, es

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = \tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2. \tag{5.28}$$

Finalmente, con ayuda de las ecuaciones (5.22), (5.27) y (5.28), el teorema del trabajo y la energía se convierte en

$$p_1 + \rho g y_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2. \tag{5.29}$$

Como en la ecuación (5.29) los subíndices 1 y 2 se refieren a dos puntos arbitrarios *cualesquiera* en el tubo, estos se pueden eliminar y escribir la ecuación (5.32) en la forma

$$p + \rho g y + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = \text{Constante}, \qquad (5.30)$$

donde p es la presión absoluta en el punto que se esté considerando.

La ecuación (5.30), donde todos los términos tienen dimensiones de presión, se conoce como la ecuación de Bernoulli para el flujo de régimen estable, incompresible y no viscoso.

Estrictamente, la ecuación de Bernoulli sólo es aplicable al flujo de régimen estable, puesto que las cantidades que intervienen en ella han sido calculadas a lo largo de la línea de corriente que se encuentra sobre el eje de la tubería; sin embargo, si el flujo es irrotacional, se puede demostrar que la constante, en la ecuación (5.30), es la misma para todas las líneas de corriente.

Por otro lado, como la estática de una partícula es un caso particular de la dinámica de ella, en forma semejante la estática de los fluidos es un caso particular de la dinámica de los mismos. Por ello, no debe sorprender que la ley de los cambios de presión con respecto a la altura, en un fluido en reposo, quede incluida en la ecuación de Bernoulli como un caso particular. En efecto, si se considera el fluido en reposo, es decir $v_1 = v_2 = 0$, la ecuación (5.29) se convierte en

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2,$$

donde la presión $p + \rho g y$, existente aun en el caso de flujo nulo, se llama *presión estática*, mientras que el término $\frac{1}{2}\rho v^2$, para flujo no nulo, se denomina *presión dinámica*.

La ecuación (5.30) permite notar que la presión tiene dimensiones de energía por unidad de volumen, de tal forma que cada término corresponde a una densidad de energía. Así, $\frac{1}{2}\rho v^2$ es la densidad de energía cinética y $\rho g y$ la densidad de energía potencial.

Igualmente, la ecuación de Bernoulli permite encontrar la velocidad de un fluido en una región determinada, mediante mediciones de presión, en el caso de un tubo horizontal como el mostrado en la figura 5.31. El principio que generalmente se emplea en tales dispositivos medido-res es el siguiente; la ecuación de continuidad requiere que la velocidad del fluido aumente en los estrechamientos, mientras que la ecuación de Bernoulli indica que en ese sitio debe disminuir la presión.

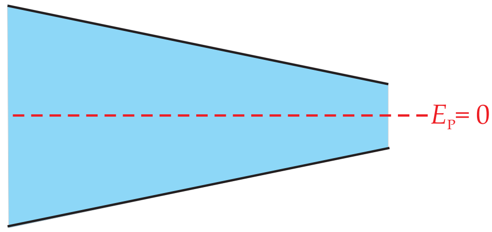


Figura 5.31: *La presión es menor en los estrechamientos.*

En este caso y de acuerdo con la figura 5.31, la ecuación (5.30) se convierte en

$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = \text{Constante},$$

donde se puede concluir que si la velocidad aumenta y el fluido es incompresible, la presión debe disminuir. Resultado que fue posible obtener en la sección 5.4, bajo consideraciones dinámicas.

5.6.1. Tubo o medidor de Venturi

Este dispositivo, mostrado en la figura 5.32, se coloca en una tubería para medir la velocidad de flujo de un líquido. Un líquido, de densidad ρ, fluye por una tubería horizontal cuya sección transversal ancha tiene una área A, mientras que en el estrechamiento, o cuello, el área se reduce a a. Entre estas dos regiones se conecta un tubo en U o manómetro, que contiene un líquido estático, por ejemplo mercurio (Hg), de densidad mayor ρ'.

Para obtener la velocidad de flujo, se aplica la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad en las regiones 1 y 2 de la figura 5.32, esto es

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2. \qquad (5.31)$$

$$A v_1 = a v_2 \qquad (5.32)$$

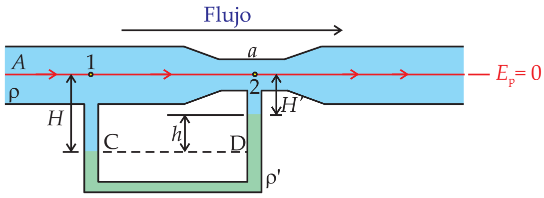


Figura 5.32: *Medidor de Venturi.*

Con ayuda de las ecuaciones (5.31) y (5.32), es posible demostrar que la diferencia de presiones entre las regiones ancha y estrecha, es

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \left(\frac{A^2}{a^2} - 1 \right). \qquad (5.33)$$

Por otro lado, como los puntos C y D de la figura 5.32 se encuentran al mismo nivel de la interfase, la presión en ellos es la misma. Teniendo en cuenta esta situación, se puede mostrar que la diferencia de presiones también está dada por

$$p_1 - p_2 = (\rho' - \rho)gh, \qquad (5.34)$$

donde $h = H - H'$.

Igualando la ecuaciones (5.33) y (5.34), se obtiene para la velocidad en la región de sección transversal A, la expresión

$$v_1 = a\sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}}. \qquad (5.35)$$

Pregunta :
a) De acuerdo con la ecuación (5.35), ¿por qué razón se debe cumplir la condición $\rho' > \rho$?
b) Cuando $\rho' = \rho$, ¿cómo se puede interpretar el resultado dado por la ecuación (5.35)?

Si se desea conocer el gasto Q, definido como el volumen de líquido que pasa por una sección cualquiera cada segundo, simplemente se calcula

$$Q = vA.$$

Ejercicio 5.5.
Para el tubo de Venturi, encuentre a) La velocidad del líquido en el estrechamiento. b) El gasto en las regiones ancha y angosta. Compare los resultados obtenidos.

5.6.2. Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli

Mediante la ecuación de Bernoulli es posible explicar muchos fenómenos físicos de interés, que se presentan comúnmente. A continuación se analizan algunas de estas situaciones.

- Es costumbre tomarse una gaseosa con la ayuda de un pitillo, como se ilustra en la figura 5.33.

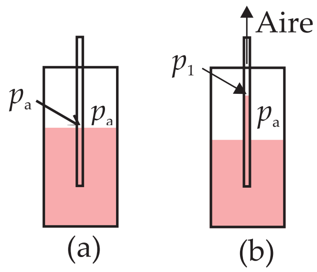


Figura 5.33: *Presiones en el interior y el exterior de un pitillo.*

Cuando se sumerge el pitillo en el vaso, figura 5.33.(a), el nivel del líquido dentro del pitillo es el mismo que en el vaso, debido a que la presión es la misma en ambas regiones, correspondiente a la presión atmosférica p_a. Una vez que se extrae el aire del interior del pitillo, figura 5.33.(b), la presión en su interior se reduce a la presión p_1. Esta reducción de la presión en el pitillo, debido al flujo de aire que se genera, permite que la presión atmosférica mayor empuje el líquido por el pitillo ($p_a > p_1$).

- En los noticieros de televisión, frecuentemente se muestra el desprendimiento del techo de una o más casas durante un vendaval, sin que se presenten mayores daños en el resto de la edificación. Esta situación se explica de una forma simple.

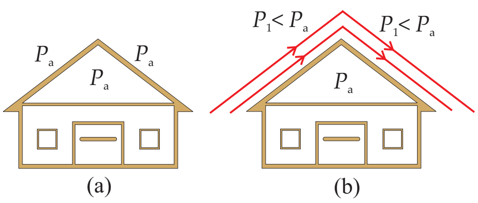


Figura 5.34: *Presión en el interior y exterior de un techo.*

Cuando el aire está en calma, figura 5.34.(a), la presión en la parte inferior y superior del techo corresponde a la presión atmosférica P_a. En un vendaval, figura 5.34.(b), la alta velocidad del aire reduce la presión en la parte superior del techo a P_1, y como consecuencia la presión atmosférica en el interior, donde el viento no llega, empuja el techo hacia arriba.

- La figura 5.35 representa, de forma simple, el modelo de un atomizador. Oprimiendo la pera, se genera una corriente de aire por el tubo central, lo que genera una disminución de la presión en su interior. De este modo, la presión atmosférica que actúa sobre la superficie del líquido, lo empuja hacia arriba por el tubo vertical para ser emitido hacia el exterior con la corriente de aire.

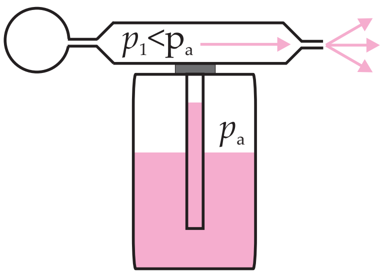


Figura 5.35: *Presiones en un atomizador.*

Otro tipo de atomizador más eficiente, se obtiene cuando se presenta un estrechamiento como en la figura 5.36. Este estrechamiento genera una disminución adicional de presión, es decir, la presión menor en A se debe tanto al estrechamiento como a la velocidad que adquiere el aire debido a la pera.

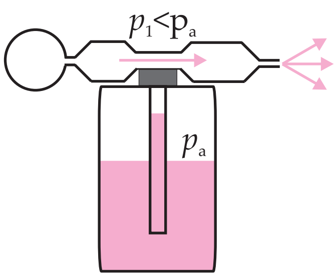
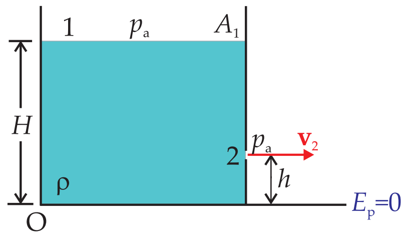


Figura 5.36: *Presiones en un atomizador con estrechamiento.*

- El ala de un avión proporciona su sustentación, esto es, la fuerza hacia arriba que mantiene el avión en el aire. Esta fuerza se debe en gran parte, a la diferencia de presión entre la parte superior del ala y su parte inferior. Esta diferencia de presión, más baja en la parte superior, se debe a que la velocidad del aire por encima del ala es mayor que por debajo. De este modo, la mayor parte de la sustentación del ala se debe a la superficie superior. La determinación de la fuerza de sustentación hacia arriba, depende del efecto anterior y de otros factores tales como la viscosidad del aire y la turbulencia que se genera.

Ejemplo 5.6.
Un tanque cilíndrico de radio R contiene un líquido de densidad ρ, hasta una altura H como se muestra en la figura. El tanque tiene un orificio de radio r, a una altura h respecto a su base. Determine a) La velocidad con la cual sale el líquido por el orificio. b) La velocidad con la que desciende la superficie libre del líquido. c) El alcance horizontal del chorro sobre el piso. d) La relación entre H y h para la cual se obtiene el máximo alcance. En este caso, ¿a qué es igual x_{mx}?



Solución
Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2 y teniendo en cuenta el nivel cero de energía potencial tomado, se obtiene

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g(H-h). \qquad (1)$$

Igualmente, mediante la ecuación de continuidad y teniendo en cuenta los radios del cilindro y el orificio, se llega a

$$v_1 = \frac{r^2}{R^2} v_2. \qquad (2)$$

a) Mediante las ecuaciones (1) y (2), se encuentra que la velocidad con la cual sale el agua por el orificio, es

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1-\frac{r^4}{R^4}}}. \qquad (3)$$

La ecuación (3) muestra que a medida que H disminuye, la velocidad de salida disminuye, a no ser que el nivel del agua no descienda, por ejemplo, mediante una manguera o llave que llegue al tanque. Por otro lado, suponiendo H constante, a medida que aumenta el radio del orificio, la velocidad aumenta. En el caso particular $r << R$, es válida la aproximación

$$v_2 = \sqrt{2g(H-h)},$$

resultado conocido como la ley de Torricelli.

b) Reemplazando la ecuación (3) en la ecuación (2), se encuentra

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g(H-h)}{\frac{R^4}{r^4}-1}}. \qquad (4)$$

El resultado dado por la ecuación (4), indica que el comportamiento de esta velocidad con H y r es semejante al caso de la velocidad de salida por el orificio.

Cuando el área transversal del tanque es muy grande comparada con el área del orificio, esto es, para el caso presente $r << R$ ó $r/R << 1$, de acuerdo con la ecuación (2), el coeficiente $(r/R)^2$ tiende a cero, y de ese modo la velocidad de la superficie libre del líquido es muy pequeña comparada con la velocidad de salida del líquido por el orificio, es decir, se puede despreciar v_1 frente a v_2. Debe quedar claro que no puede ser cero sino que tiende a cero. ¿Por qué?

En la siguiente tabla, se muestra la relación entre estas velocidades para diferentes relaciones entre los radios del orificio y del tanque.

r/R	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
v_1/v_2	0.25	0.11	0.06	0.04	0.03

c) Para el alcance horizontal del chorro sobre el piso, se utiliza el sistema de referencia mostrado en la siguiente figura.

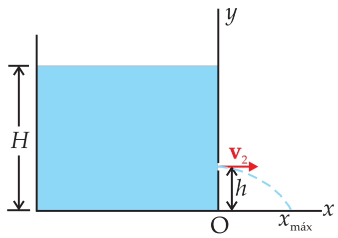
Ecuaciones cinemáticas de posición, para una partícula de líquido que sale por el orificio con una velocidad v_2, dada por la ecuación (3).

En x

$$x = v_2 t, \qquad (5)$$

En y

$$y = h - \tfrac{1}{2}gt^2. \qquad (6)$$



En el piso, $y = 0$ y por la ecuación (6), el tiempo que demora la partícula en ir del orificio al piso es

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (7)$$

Reemplazando las ecuaciones (7) y (3) en la ecuación (5), se llega a

$$x_{\text{mx}} = 2\sqrt{\frac{h(H-h)}{1-\frac{r^4}{R^4}}}. \qquad (8)$$

Para el caso $r << R$, es válida la aproximación

$$x_{\text{mx}} = 2\sqrt{h(H-h)}.$$

d) La relación entre H y h que permite el máximo valor del alcance, se obtiene al derivar x_{mx} respecto a h e igualar a cero. Así, con la ayuda de la ecuación (8) se obtiene

$$h = \tfrac{1}{2}H. \qquad (9)$$

Reemplazando la ecuación (9) en la ecuación (8), se tiene

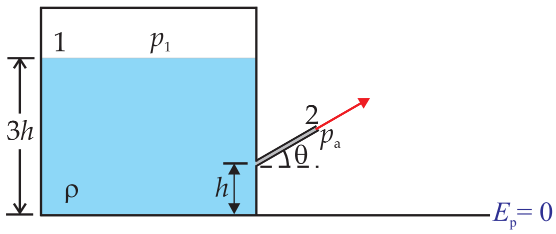
$$x'_{\text{mx}} = \frac{H}{\sqrt{1-\frac{r^4}{R^4}}}, \qquad (10)$$

donde para $r << R$, se transforma en

$$x'_{\text{mx}} = H.$$

Ejercicio 5.7.
Resuelva el ejemplo 5.6, si el orificio circular de radio r se practica a una profundidad h respecto a la superficie libre del líquido. Compare los resultados con los obtenidos anteriormente.

Ejemplo 5.7.
Un tanque muy grande y sellado en su parte superior, contiene un líquido de densidad ρ. Como se ilustra en la figura, el tanque tiene un pequeño orificio a una altura h respecto a la base, donde se le ha conectado un tubo delgado de longitud h e inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. Entre la tapa del tanque y la superficie del líquido, se tiene un gas a la presión p_1. Determine la velocidad inicial con la que sale el líquido por el extremo abierto del tubo.



Solución
Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, teniendo en cuenta el nivel cero de energía potencial y que la presión en 2 es la atmosférica, se encuentra

$$p_1 - p_a = \tfrac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g h(\text{sen}\theta - 2). \quad (1)$$

Ahora, al aplicar la ecuación de continuidad entre los mismos puntos, se obtiene

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1}v_2. \quad (2)$$

Reemplazando la ecuación (2) en la ecuación (1), se tiene

$$p_1 - p_a = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right) + \rho g h(\text{sen}\theta - 2). \quad (3)$$

Como el tanque es muy grande y el orificio de salida muy pequeño, es válida la relación $A_1 >> A_2$, esto es, A_2^2/A_1^2 tiende a cero. Bajo esta aproximación, la velocidad en 1 es despreciable, no nula, frente a la velocidad en 2. Por consiguiente, la ecuación (3) permite encontrar

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_a) + 2gh(2 - \text{sen}\theta)}. \quad (4)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4), para un ángulo θ fijo, la velocidad de salida aumenta al aumentar la presión p_1, donde $p_1 > p_a$. ¿Por qué? Por otro lado, para una presión p_1 fija, se tiene que la velocidad disminuye al aumentar el valor del ángulo de inclinación del tubo de salida; de este modo, la velocidad adquiere su máximo valor para $\theta = 0$ y el mínimo valor para $\theta = 90^o$.

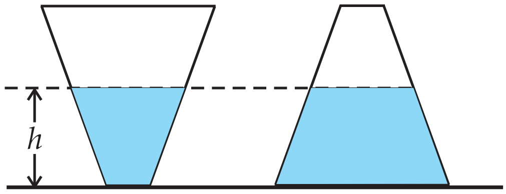
Igualmente, para p_1 y θ fijos, la velocidad también depende del líquido ya que esta depende de la densidad, de tal manera que a mayor densidad menor velocidad de salida.

Ejercicio 5.8.
Compare la velocidad inicial de salida, obtenida en el ejemplo 5.7, con la velocidad inicial de salida una vez que se practica un orificio en la parte superior del tanque.

PREGUNTAS

1. Se pone a congelar agua en un recipiente, de tal manera que el hielo ocupe completamente su volumen. Cuando se deja descongelar el hielo, ¿qué se puede decir del volumen final del agua, comparado con el volumen inicial del hielo? Explique su respuesta.
2. Un bloque se encuentra en el aire suspendido de un dinamómetro. ¿Se presenta alguna diferencia en la lectura del dinamómetro, cuando el bloque se sumerge en un líquido? ¿Por qué?
3. En una varilla horizontal que se encuentra a determinada altura respecto a la tierra, se sujeta un globo de helio y otro de oxígeno, utilizando una cuerda en cada caso. a) ¿Se presenta alguna diferencia en la posición de las bombas? b) Si se cortan las cuerdas, ¿qué se puede afirmar sobre lo que le sucede a cada bomba? Explique cada una de sus respuestas.
4. Los tanques de almacenamiento de agua para el consumo humano, se encuentran en las partes altas de la ciudad. ¿Qué se busca con lo anterior? Justifique su respuesta.
5. En el interior de los recipientes de la figura se ha depositado el mismo líquido, hasta el nivel indicado por h. a) ¿Existe alguna diferencia entre las fuerzas que el fluido ejerce sobre la base de cada recipiente? b) En cada caso, ¿la fuerza es igual al peso del fluido? c) ¿La presión ejerci-

da por el fluido sobre la base de cada recipiente es la misma? Justifique cada de las respuestas.



6. Se tienen dos esferas macizas de igual radio, pero una es de hierro y la otra de madera. Cuando se sueltan desde una altura determinada respecto a la tierra, sobre cual esfera el aire ejerce mayor fuerza, considerándolo como un fluido ideal? ¿Por qué?
7. Una varilla uniforme de madera, se coloca sobre la superficie del agua contenida en un recipiente estático. a) Bajo estas condiciones, ¿qué orientación adquiere la varilla? b) Si uno de los extremos de la varilla se lastra con plomo, ¿qué efecto físico se presenta inicialmente sobre la varilla? Explique cada una de sus respuestas.
8. Por una tubería fluye agua en régimen estable. ¿Cómo debe ser la tubería, para garantizar que las moléculas de agua se muevan a) Aceleradamente? ¿Por qué? b) Desaceleradamente? ¿Por qué?
9. El humo sale por la chimenea hacia el exterior de una vivienda, cuando el aire está en calma. ¿ocurrirá algún cambio, cuando el aire exterior se encuentra en movimiento? Explique su respuesta.
10. Por el conducto AB de la figura, se permite que circule una corriente de aire a una velocidad determinada. a) Si se coloca una lámina de cartulina C frente a la corriente de aire, ¿que ocurre una vez que esta se suelta? b) Cuando se elimina la corriente de aire, ¿qué le sucede a la lámina? Justifique cada una de las respuestas.