3 TRABAJO Y ENERGIA

BERNARDO ARENAS GAVIRIA
Universidad de Antioquia
Instituto de Física

2011

Índice general

Capítulo 3

Trabajo y energía

Competencias
En esta unidad se busca que el estudiante

- Defina e infiera la utilidad del vector impulso.
- Defina y aplique el concepto de trabajo realizado por una fuerza sobre una partícula en movimiento
- Defina e infiera la utilidad del concepto de potencia.
- Defina el concepto de energía cinética de una partícula en movimiento.
- Obtenga y aplique el teorema del trabajo y la energía.
- Muestre la independencia con la trayectoria, del trabajo realizado por una fuerza constante.
- Defina el concepto de fuerza conservativa.
- Defina el concepto de energía potencial.
- Distinga entre energía potencial gravitacional y energía potencial elástica.
- Infiera la relación entre energía potencial y fuerza conservativa.
- Obtenga la energía total de una partícula.
- Aplique la ley de conservación de la energía mecanica total de una partícula.
- Distinga entre un sistema conservativo y un sistema no conservativo.
- Obtenga la energía mecánica perdida en un sistema no conservativo.
- Relacione el concepto de energía potencial con el concepto de derivada direccional.
- Analice curvas de energía potencial.
- Defina el concepto de colisión.
- Distinga entre colisión y choque.
- Defina una dispersión.
- Distinga entre colisión elástica y colisión inelástica.
- Defina una colisión plástica.
- Distinga entre sistema aislado y sistema no aislado.
- Aplique adecuadamente el principio de conservación del vector momento lineal total de un sistema aislado.
- Aplique adecuadamente la conservación de la energía cinética total de un sistema en un choque elástico.
- Obtenga la energía cinética perdida en un choque inelástico.

CONCEPTOS BASICOS
En esta unidad de trabajo y energía, se definirán los siguientes conceptos que son básicos en el

estudio de la dinámica de una partícula: Impulso (*vectI*), trabajo (W), potencia(P), energía cinética ($E_{\rm k}$), Teorema del trabajo y la energía ($W = \Delta E_{\rm k}$), energía potencial($E_{\rm p}$), fuerza conservativa y no conservativa, sistema conservativo y no conservativo, conservación de la energía mecánica ($\Delta E = 0$), derivada direccional y energía potencial, curvas de energía potencial y colisiones.

3.1. Introducción

El problema fundamental de la dinámica de una partícula, es poder predecir su posición en función del tiempo t, sabiendo con cuáles partículas interactúa, además de conocer las condiciones iniciales a las que está sometida. De acuerdo con las dos unidades anteriores, el procedimiento que se debe llevar a cabo es el siguiente: se determina la fuerza neta $\mathbf{F}$, que actúa sobre la partícula de masa m y mediante la segunda ley de Newton para masa constante $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, se encuentra la aceleración de la partícula. Luego, utilizando la definición de aceleración $\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$, se obtiene la velocidad de la partícula en función del tiempo $\mathbf{v}(t)$. Finalmente, por medio de la definición de velocidad $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$, se resuelve el problema fundamental de la dinámica al poder determinar la posición del cuerpo en función del tiempo $\mathbf{r}(t)$.

En esta unidad se trata la dinámica de una partícula desde otro punto de vista, que permitirá de nuevo resolver completamente el problema de la dinámica de una partícula. Necesariamente, para definir los nuevos conceptos, se debe partir de las leyes de Newton ya que son el soporte de la dinámica de una partícula. Por otro lado, se observa que la notación de estas cantidades físicas, excepto el vector impulso, corresponde a cantidades escalares, lo que generalmente evita el uso de cantidades vectoriales en los procedimientos matemáticos. En síntesis, para su estudio se dispone de los conceptos cinemáticos y dinámicos descritos y analizados en las dos unidades anteriores. Igual que en la cinemática y en la dinámica sólo se considera el movimiento de traslación de los cuerpos, o sea, que estos se pueden seguir tratando bajo el modelo de partícula.

Igual que en la unidad anterior, cuando se analiza el comportamiento dinámico de un cuerpo, se llevan a cabo los mismos pasos, esto es:

- Definir el *sistema*, que generalmente está formado por varios cuerpos.
- Elegir, del sistema, el cuerpo al cual se le va a analizar el movimiento, es decir, el *cuerpo o partícula de interés*.
- Delimitar el *medio ambiente o alrededores*, formado por el resto del sistema, o sea, por los cuerpos cercanos que interactúan con el cuerpo de interés.

En principio, en cuanto a la forma funcional de la fuerza, matemáticamente, se pueden considerar dos casos

1. Que la fuerza sea función del tiempo, es decir, $\mathbf{F}(t)$.
2. Que la fuerza sea función de la posición, esto es $\mathbf{F}(r)$.

Como se verá más adelante, la forma funcional de la fuerza con la posición es la de mayor interés, ya que este es tipo de fuerzas que generalmente se presentan en la naturaleza.

3.2. Impulso (I)

Para el caso en el cual la fuerza depende del tiempo $\mathbf{F}(t)$, la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$, se puede escribir en la forma

$$\int_{\mathbf{p}_{\rm o}}^{\mathbf{p}} \mathrm{d}\mathbf{p} = \int_{t_{\rm o}}^{t} \mathbf{F}\mathrm{d}t,$$

donde al integrar y evaluar, se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{p} &= \mathbf{p} - \mathbf{p}_{\rm o} \\ &= \int_{t_{\rm o}}^{t} \mathbf{F}(t)\mathrm{d}t \\ &\equiv \mathbf{I}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde la integral de la ecuación (3.1) define la cantidad física denominada impulso **I**. Por lo tanto, el impulso es igual al cambio en el momento lineal de la partícula. Esto hace que las dimensiones y unidades de impulso sean las mismas de momento lineal. De este modo, por definición, el impulso no depende explícitamente de la masa m ni de la velocidad inicial v_o de la partícula, ya que sólo importa el cambio en su momento lineal.

De acuerdo con la ecuación 3.1, se tienen dos formas de conseguir el mismo valor en el impulso de una partícula

1. Que una fuerza grande actúe sobre la partícula durante un tiempo pequeño, ya que esto puede ocasionar un cambio grande en el momento lineal. Esta situación se presenta, por ejemplo, cuando en un partido de béisbol el bateador golpea la pelota, pues en este caso, se le aplica una fuerza muy grande a la pelota durante un intervalo de tiempo muy pequeño.

2. Igualmente, que una fuerza pequeña actúe durante un tiempo grande, de esta forma, se puede ocasionar un cambio en el momento lineal igual al anterior. Por ejemplo, la fuerza gravitacional actuando sobre la pelota de béisbol durante un intervalo de tiempo grande.

Una situación particular se obtiene cuando la fuerza es constante, en este caso, la ecuación (3.1) se transforma en

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{F}(t - t_o) \\ &= \mathbf{p} - \mathbf{p}_o \\ &= \Delta \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Como el objetivo de la dinámica es poder determinar la posición de una partícula en función del tiempo, se reemplaza la definición de momento lineal, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, en la ecuación (3.1), para obtener $m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_o = \mathbf{I}$, o sea, $\mathbf{v} - \mathbf{v}_o = \mathbf{I}/m$. Ahora, utilizando la definición de velocidad es posible llegar a

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{m}\int_{t_o}^{t} \mathbf{I}\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

Mediante la ecuación (3.2) se resuelve el problema completamente si se conoce la forma funcional de la fuerza con el tiempo $\mathbf{F}(t)$.

Como en la naturaleza generalmente las fuerzas se conocen en función de la posición, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ó $\mathbf{F}(x,y,z)$, para resolver la ecuación (3.1) se hace necesario conocer la forma como varía el vector posición con el tiempo $\mathbf{r}(t)$, pero esto es lo que se busca desde el comienzo, es decir, hay que resolver el problema de interés antes de poder resolver la ecuación (3.2). Por esta razón, es necesario definir otros conceptos que sí permiten cumplir con el objetivo propuesto, tal como ocurre con el trabajo realizado por una fuerza y la energía total de una partícula.

3.3. Trabajo (W)

Se considera una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Si en un tiempo dt la partícula sufre un desplazamiento d$\mathbf{r}$ debido a la acción de la fuerza, el trabajo realizado por ella durante tal desplazamiento, se define por

$$\mathrm{d}W \equiv \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{3.3}$$

Si se toma $|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}S$, mediante la definición de producto escalar, la ecuación (3.3) adquiere la forma $\mathrm{d}W = F\cos\theta \mathrm{d}S$.

De la figura 3.1, se observa que $F_T = F\cos\theta$ es la componente de la fuerza a lo largo de la tangente a la trayectoria seguida por la partícula. De este modo,

$$\mathrm{d}W = F_T \mathrm{d}S. \tag{3.4}$$

De acuerdo con la ecuación (3.4), se concluye que la componente de la fuerza normal a la trayectoria seguida por la partícula, no realiza trabajo. Así, en general, las fuerzas perpendiculares al desplazamiento de una partícula no realizan trabajo. Esta situación se presenta siempre con la normal (**N**) y con el peso (**W**) en el caso de un cuerpo que se mueve sobre una superficie horizontal; igualmente, ocurre con la fuerza centrípeta cuando un cuerpo se mueve sobre una trayectoria circular.

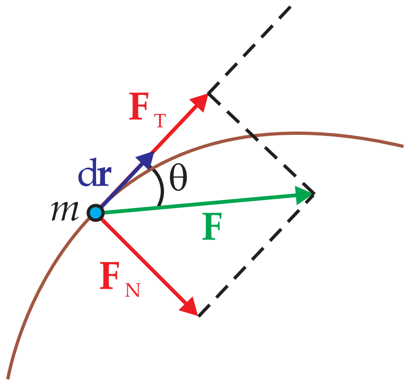


Figura 3.1: *Trabajo realizado por* **F** *en un* d*t*.

Generalmente, interesa determinar el trabajo total realizado por la fuerza **F**, cuando la partícula se mueve desde un punto A hasta un punto B de su trayectoria, como en el caso mostrado en la figura 3.2. Como el trabajo total corresponde a la suma de los trabajos infinitesimales entre los dos puntos considerados, la sumatoria se transforma en una integral por lo que las ecuaciones (3.3) y (3.4) adquieren la forma

$$\begin{aligned} W &= \int_{A}^{B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{A}^{B} F_T dS. \end{aligned} \tag{3.5}$$

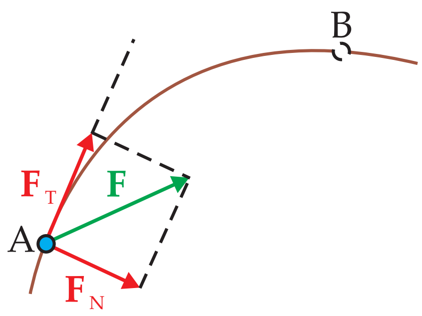


Figura 3.2: *Trabajo realizado por* **F** *entre A y B.*

3.3.1. Casos particulares de la ecuación (3.5)

1. Una partícula con movimiento rectilíneo, está sometida a la acción de una fuerza constante **F** que forma un ángulo θ con la trayectoria, como se ilustra en la figura 3.3. En este caso, mediante la ecuación (3.5), se encuentra que el trabajo realizado por la fuerza entre las posiciones A y B está dado por

$$W = F\cos\theta(x_B - x_A).$$

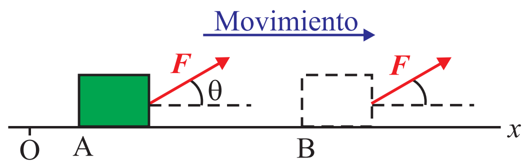


Figura 3.3: *Trabajo realizado por* **F** *no paralela al desplazamiento.*

2. Cuando la partícula tiene movimiento rectilíneo, pero la fuerza constante **F** es paralela al desplazamiento, el trabajo realizado por ella entre las posiciones A y B de la figura 3.4 es

$$W = F(x_B - x_A).$$

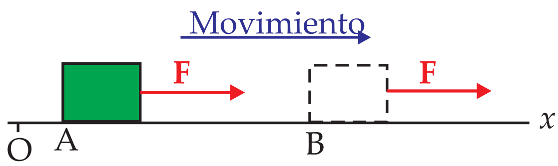


Figura 3.4: *Trabajo realizado por* **F** *paralela al desplazamiento.*

Dimensiones y unidades fuerza
Teniendo en cuenta la definición de trabajo, dada por la ecuación (3.3), se tiene que sus dimensiones son $[W] = ML^2T^{-2}$. De este modo, la unidad en el sistema internacional de unidades es $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$, en el sistema gaussiano de unidades $g \cdot cm^2 \cdot s^{-2}$ y en el sistema inglés $lb \cdot p$.

Es costumbre designar estas unidades con los siguientes nombres: $1\,\text{J} \equiv 1\,\text{kgcdotm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ en el sistema SI, $1\,\text{ergio} \equiv 1\,\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ en el sistema gaussiano. Por consiguiente, la relación entre estas unidades es $1\,\text{J} \equiv 10^7$ ergios.

3.3.2. Interpretación geométrica de la ecuación (3.5)

Cuando se conoce la gráfica de la forma como varía la componente tangencial de la fuerza con el desplazamiento de la partícula, es posible interpretar la ecuación (3.5) de la siguiente manera. Si esta componente de la fuerza varía en la forma mostrada en la figura 3.5, el área del pequeño rectángulo, $\text{d}A = F_\text{T}\text{d}S$, es igual al trabajo infinitesimal realizado por la fuerza correspondiente durante el desplazamiento $\text{d}S$. Ahora, el área total bajo la curva entre las posiciones A y B, es igual a la suma de las áreas de todos los pequeños rectángulos dibujados entre dichos puntos; pero como las áreas son infinitesimales, la suma se transforma en una integral y así el área total corresponde a la integral dada por la ecuación (3.5). En conclusión, el trabajo total realizado por la fuerza entre las posiciones A y B es igual al área total bajo la curva.

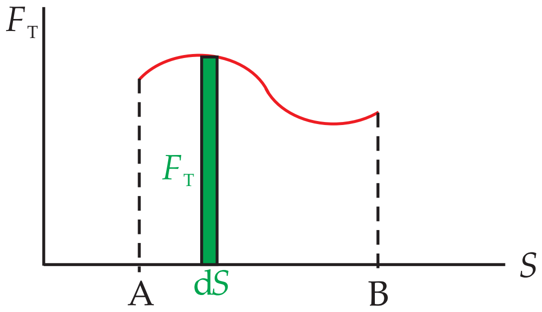


Figura 3.5: *Variación de F_T en función de S.*

El análisis anterior, se puede expresar matemáticamente en la forma

$$\begin{aligned} \text{Area bajo la curva} &= W \\ &= \int_\text{A}^\text{B} F \cdot \text{d}r \\ &= \int_\text{A}^\text{B} F_\text{T}\text{d}S. \end{aligned}$$

3.3.3. Trabajo de una fuerza en componentes rectangulares

En tres dimensiones y en componentes rectangulares, la fuerza que actúa sobre una partícula se expresa en la forma $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$; en forma similar, el vector desplazamiento está dado por $\text{d}\mathbf{r} = \text{d}x\mathbf{i} + \text{d}y\mathbf{j} + \text{d}z\mathbf{k}$. Así, al efectuar el producto escalar entre estos dos vectores, se encuentra que el trabajo total realizado por la fuerza entre los puntos A y B es dado por

$$W = \int_\text{A}^\text{B} (F_x\text{d}x + F_y\text{d}y + F_z\text{d}z). \tag{3.6}$$

Si la fuerza $\mathbf{F}$ y el vector desplazamiento $\text{d}\mathbf{r}$ se encuentran, por ejemplo, en el plano xy, la ecuación (3.6) se transforma en

$$W = \int_\text{A}^\text{B} (F_x\text{d}x + F_y\text{d}y).$$

3.3.4. Trabajo realizado por la fuerza resultante

Si en la ecuación (3.5), la fuerza $\mathbf{F}$ corresponde a la fuerza resultante o neta de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, esto es si $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_\text{i} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots$, el trabajo neto o total realizado sobre la partícula por la fuerza resultante, para llevarla desde la posición A hasta la posición B de la figura 3.6, se obtiene mediante la expresión

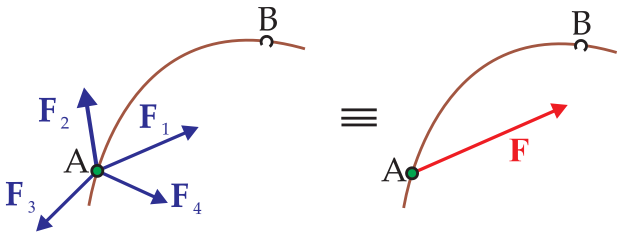
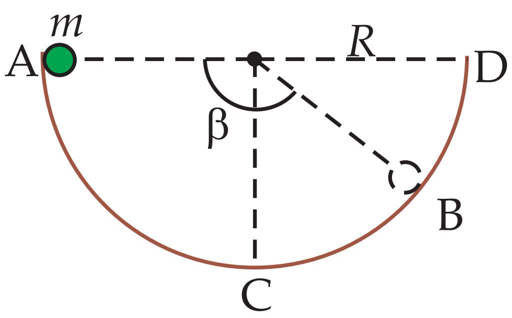


Figura 3.6: *Trabajo realizado por la resultante.*

$$\begin{aligned} W &= \int_\text{A}^\text{B} (\mathbf{F}_1 \cdot \text{d}\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \text{d}\mathbf{r} + \mathbf{F}_3 \cdot \text{d}\mathbf{r} + \cdots) \\ &= \int_\text{A}^\text{B} \mathbf{F} \cdot \text{d}\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el trabajo realizado por la fuerza resultante es igual a la suma de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas que actúan sobre la partícula.

Ejemplo 3.1.
Un pequeño cuerpo de masa m, que parte del punto A de la figura, desliza sobre la trayectoria circular de radio R. Suponer que la magnitud de la fuerza de fricción F_k es constante, con valor un décimo del peso del cuerpo. a) Determine el trabajo neto realizado sobre el pequeño cuerpo, cuando pasa por el punto B. b) Si $m = 500\,\mathrm{g}$, $R = 20\,\mathrm{cm}$, para $\beta = 45^o, 90^o, 135^o, 180^o$, hallar el valor de la cantidad obtenida en el numeral anterior.



Solución
Como consecuencia de la ecuación (3.5), el trabajo realizado por una fuerza está dada por

$$W = \int_A^B F\cos\theta \mathrm{d}S = \int_A^B F_T \mathrm{d}S,$$

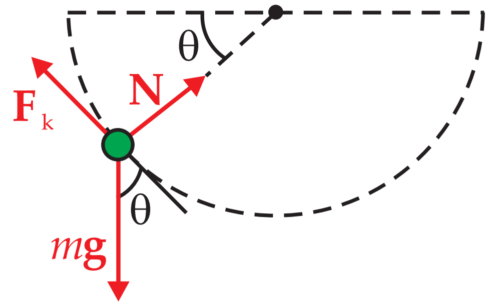
pero en una trayectoria circular y para un desplazamiento angular infinitesimal $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta$, se tiene

$$W = R\int_A^B F\cos\theta \mathrm{d}\theta = R\int_A^B F_T \mathrm{d}\theta. \qquad (1)$$

a) De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre del pequeño cuerpo, de las tres fuerzas que actúan, sólo realizan trabajo el peso y la fuerza de fricción dinámica.

Para la posición genérica de la figura anterior, luego de integrar y evaluar, se encuentra que

$$W_{mg} = mgR\mathrm{sen}\beta, \qquad (2)$$



$$W_{F_k} = -\frac{1}{10}mgR\beta. \qquad (3)$$

Por consiguiente, el trabajo total es

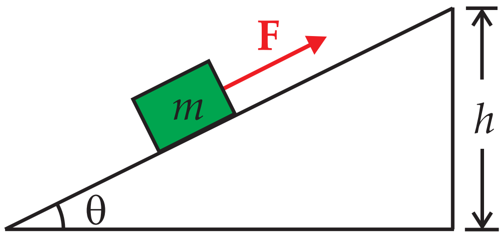
$$W = mgR(\mathrm{sen}\beta - \frac{\beta}{10}).$$

b) Reemplazando valores, con $m = 500\,\mathrm{g} \equiv 0.5\,\mathrm{kg}$ y $R = 20\,\mathrm{cm} \equiv 0.2\,\mathrm{m}$ se tiene

$\beta(^o)$	W(J)
45	0.62
90	0.83
135	0.46
180	−0.31

De acuerdo con los resultados obtenidos, cuando $\beta = 45^o$, el trabajo es positivo lo que indica que es mayor el trabajo realizado por el peso, que el realizado por la fuerza de fricción dinámica, igual que para 90^o y 135^o . En cambio, para $\beta = 180^o$, el trabajo neto realizado por el peso es nulo a diferencia del trabajo realizado por la fuerza de fricción que es diferente de cero y negativo.

Ejemplo 3.2.
Un bloque de masa m, asciende sobre la superficie del plano inclinado de la figura, debido a la acción de la fuerza **F**. El coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es μ y la magnitud de la fuerza aplicada es $2mg$. Cuando el bloque ha ascendido una altura h, determine a) El trabajo realizado por la fuerza resultante. b) El trabajo neto realizado sobre el bloque, considerando por separado cada una de las fuerzas. c) El valor del trabajo total si $m = 500\,\mathrm{g}$, $h = 0.5\,\mathrm{m}$ y $\mu = 0.3$, para diferentes valores del ángulo θ.
Solución

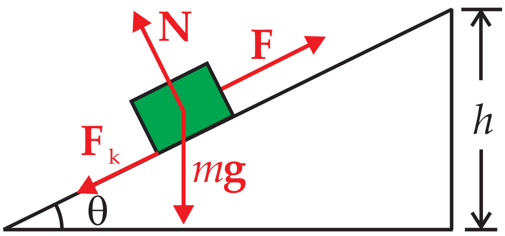


a) De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre mostrado en la siguiente figura, la componente de la fuerza neta paralela al desplazamiento del bloque, es constante y está dada por

$$F_x = mg(2 - \text{sen}\theta - \mu\cos\theta),$$

donde se ha tomado el sentido de movimiento como positivo. Así, el trabajo realizado sobre el bloque al desplazarse la distancia $h/\text{sen}\theta$ es

$$W = mgh(2\csc\theta - 1 - \mu\cot\theta).$$



b) El trabajo realizado por cada fuerza es

$$\begin{aligned} W_F &= 2mgh\csc\theta, \\ W_N &= 0, \end{aligned}$$

ya que es una fuerza perpendicular al desplazamiento.

$$\begin{aligned} W_{mg} &= -mgh, \\ W_{F_k} &= -\mu mgh\cot\theta. \end{aligned}$$

Se observa que la única fuerza que realiza trabajo positivo es la fuerza aplicada, ya que esta actúa en el sentido del desplazamiento.

Sumando los trabajos anteriores, se encuentra que el trabajo neto, total o resultante, realizado por las fuerzas que actúan sobre el bloque está dado por

$$W = mgh(2\csc\theta - 1 - \mu\cot\theta),$$

que es idéntico al obtenido en el numeral anterior.

c) Reemplazando valores se obtiene la siguiente tabla

$\theta(^o)$	W(J)
10	21.6
30	6.08
45	3.74
60	2.78
75	2.43

De acuerdo con estos resultados, se tiene que el trabajo neto disminuye a medida que la inclinación del plano se incrementa. ¿Por qué?

Ejercicio 3.1.
Halle el valor de θ, para el cual el trabajo realizado sobre el bloque del ejemplo 3.2 es mínimo.

3.4. Potencia

Como se observa en la definición dada por la ecuación (3.3), el trabajo es una cantidad escalar que no depende del tiempo. Por esta razón en la práctica y particularmente en la industria, no interesa el trabajo total que pueda realizar una máquina sino la rapidez con la cual esta hace trabajo.

La potencia es una cantidad escalar que tiene en cuenta este hecho y se define como la rapidez con la cual se realiza trabajo. Matemáticamente, la potencia media en un intervalo de tiempo t, se define por

$$\bar{P} \equiv \frac{W}{t},$$

y la potencia instantánea en un instante de tiempo t, está dada por

$$P \equiv \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \tag{3.7}$$

En el caso particular que la potencia sea constante, la potencia media es igual a la potencia instantánea.

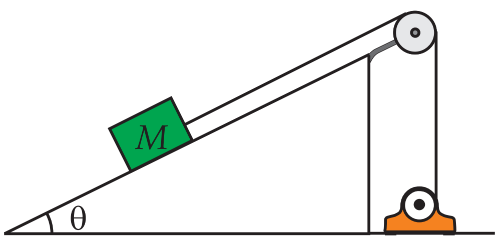
Mediante las ecuaciones (3.3) y (3.7), la potencia instantánea se puede expresar en función del vector velocidad, en la forma

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \end{aligned}$$

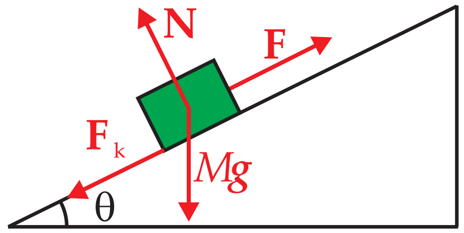
Dimensiones y unidades de potencia
De acuerdo con su definición, las dimensiones de potencia son $[P] = \mathrm{ML^2T^{-3}}$. Es costumbre emplear, en este caso, la unidad del sistema internacional de unidades $\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-3}}$. Se define el vatio mediante la relación $1\,\mathrm{w} \equiv 1\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-3}}$. Por comodidad, se emplean el kilovatio (Kw) y el megavatio (Mw), dados por $1\,\mathrm{Kw} \equiv 10^3\,\mathrm{w}$ y $1\,\mathrm{Mw} \equiv 10^6\,\mathrm{w}$, respectivamente. Otra unidad que no es de mucho uso en la ciencia, aunque sí lo es en los casos prácticos, es el caballo vapor (hp), que se relaciona con la unidad SI mediante la expresión $1\,\mathrm{hp} \equiv 746\,\mathrm{w}$.

Mediante la definición de potencia es posible obtener otra unidad de trabajo, que es bastante empleada en el caso de las hidroeléctricas, a esta unidad se le conoce como el Kilovatio-hora y su relación con la unidad SI es $1\,\mathrm{Kw-h} \equiv 3.6\times10^6\,\mathrm{J}$. La liquidación de energía facturada por las Empresas Públicas, se hace de acuerdo con el número de Kilovatios-hora consumidos por mes.

Ejemplo 3.3.
Como se indica en la figura, un bloque de masa M asciende con velocidad constante $\mathbf{v}$ por una colina que forma un ángulo θ con la horizontal. El bloque está unido a un motor mediante una cuerda que pasa por una polea y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es μ . Determine, en función del ángulo θ, la potencia desarrollada por el motor.



Solución
Diagrama de cuerpo libre para el bloque



Como el bloque se encuentra en equilibrio dinámico, la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el motor tiene magnitud

$$F = Mg(\mathrm{sen}\theta + \mu\cos\theta).$$

De esta forma, la potencia desarrollada por el motor es

$$P = Mgv(\mathrm{sen}\theta + \mu\cos\theta).$$

En la siguiente tabla, se muestran los valores del término entre paréntesis, para diferentes valores del ángulo θ y del coeficiente de fricción μ.

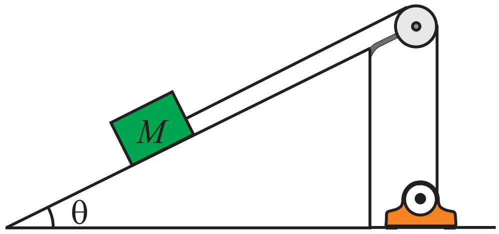
$\theta(^o)$	0	15	30	45	60	75	90
μ							
0.2	0.2	0.45	0.67	0.85	0.97	1.02	1.0
0.4	0.4	0.64	0.85	0.99	1.07	1.07	1.0
0.6	0.6	0.84	1.02	1.13	1.17	1.12	1.0
0.8	0.8	1.03	1.19	1.27	1.27	1.17	1.0

De la tabla anterior se pueden obtener dos conclusiones

a) Se observa que para un valor dado de μ, la potencia aumenta hasta un valor máximo, a partir del cual decrece hasta un valor que tiende a la unidad.

b) Adicionalmente, para un valor dado del ángulo θ, la potencia aumenta continuamente con el aumento en el coeficiente de fricción

Ejercicio 3.2.
Como se indica en la figura, un bloque de masa M asciende con velocidad constante $\mathbf{v}$ por una colina que forma un ángulo θ con la horizontal. El bloque está unido a un motor mediante una cuerda que pasa por una polea y las superficies en contacto son lisas. Determine, en función del ángulo θ, la potencia desarrollada por el motor.



Compare el resultado con el obtenido en el ejemplo 3.3.

3.5. Energía cinética(ΔE_k)

Se considera el movimiento de un cuerpo de masa m, sobre el que actúa una fuerza neta $\mathbf{F}$.

Escribiendo la segunda ley de Newton en la forma

$$\mathbf{F} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t},$$

y reemplazando en la ecuación (3.5), se encuentra que el trabajo realizado sobre la partícula por la fuerza neta, entre la posición A y la posición B de la figura 3.7, es dado por

$$\begin{aligned} W &= m\int_A^B \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= m\int_{\mathbf{v}_A}^{\mathbf{v}_B} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

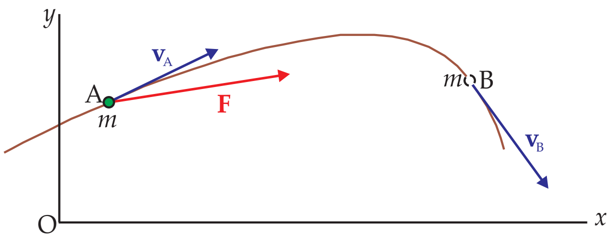


Figura 3.7: *Movimiento de m entre A y B sometida a* $\mathbf{F}$.

Luego de resolver y evaluar la segunda integral de la ecuación (3.8), se obtiene

$$W = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2. \tag{3.9}$$

La cantidad escalar $\frac{1}{2}mv^2$, que depende de la magnitud de la velocidad, mas no de su dirección, se define como la energía cinética E_k de la partícula, es decir

$$\begin{aligned} E_k &\equiv \tfrac{1}{2}mv^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &= \frac{p^2}{2m}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde se ha utilizado la definición de momento lineal.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.9) y (3.10), el trabajo realizado sobre la partícula por la fuerza neta $\mathbf{F}$, independientemente del tipo de fuerza, está dado por

$$\begin{aligned} W &= E_{kB} - E_{kA} \\ &= \Delta E_k. \end{aligned} \tag{3.11}$$

De la ecuación (3.11), se puede concluir que la variación de la energía cinética de una partícula *siempre* es igual al trabajo realizado por la *fuerza neta* que actúa sobre ella durante el movimiento. Como la energía cinética es una cantidad física que depende de la velocidad, entonces debe depender del sistema de referencia ya que la velocidad depende de él. Igualmente, al ser la energía cinética una función de la magnitud de la velocidad, es una energía que se le asocia a la partícula como consecuencia de su movimiento. Las ecuaciones (3.9) y (3.11), expresan lo que en física se conoce como el *teorema del trabajo y la energía*.

3.5.1. Casos particulares del teorema del trabajo y la energía

1. Si la velocidad de una partícula permanece constante en magnitud y dirección, como en la figura 3.8, el cambio en la energía cinética es nulo, es decir, $\Delta E_k = 0$. Por consiguiente, el trabajo realizado sobre la partícula es nulo y posee un movimiento rectilíneo uniforme.

2. Si la velocidad de la partícula permanece constante en magnitud mas no en dirección, como en la figura 3.9, en forma similar, se tiene que el cambio en la energía cinética es nulo, $\Delta E_k = 0$. Por tanto, de nuevo el trabajo realizado sobre la partícula es nulo y posee un movimiento circular uniforme.

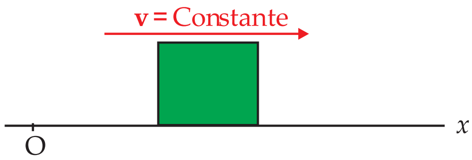


Figura 3.8: *Cuerpo con movimiento rectilíneo uniforme.*

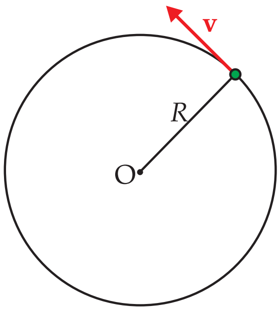


Figura 3.9: *Cuerpo con movimiento circular uniforme.*

3. Cuando un cuerpo, como en la figura 3.10, tiene movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, tal como ocurre cuando en un auto se aplica el acelerador, la velocidad aumenta, o sea, que la energía cinética aumenta y el trabajo es positivo. Este caso también se presenta cuando un cuerpo desciende por una plano inclinado liso, debido a la componente del peso paralela al desplazamiento.

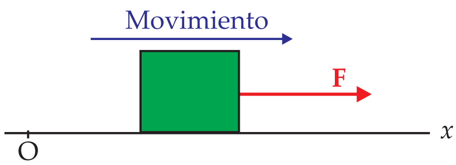


Figura 3.10: *Cuerpo con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.*

4. Cuando el cuerpo, como se ilustra en la figura 3.11, tiene movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado, situación que se presenta cuando en un auto se aplican los frenos, la velocidad disminuye, o sea, que la energía cinética disminuye y el trabajo realizado es negativo. Igual cosa ocurre cuando un cuerpo asciende por un plano inclinado liso, ya que la componente del peso se opone al desplazamiento de la partícula. Otra fuerza que siempre realiza trabajo negativo, es la fuerza de fricción dinámica que actúa sobre un cuerpo en movimiento.

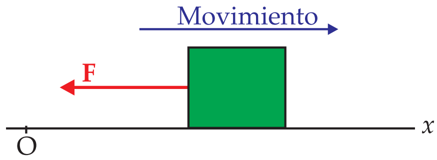


Figura 3.11: *Cuerpo con movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado.*

En síntesis: *Cuando la energía cinética de una partícula aumenta o disminuye, es porque sobre ella actúa una fuerza neta que realiza trabajo; si su energía cinética permanece constante, la fuerza neta es cero y la partícula se encuentra en equilibrio.*

Dimensiones y unidades de energía cinética
De acuerdo con las ecuaciones (3.9) y (3.11), las dimensiones y unidades de la energía cinética son las mismas de trabajo.

En mecánica cuántica y particularmente física nuclear, se encuentra que las unidades definidas anteriormente para trabajo y energía son muy grandes, por ello, a nivel microscópico se utiliza otra unidad más pequeña de energía llamada electronvoltio (eV) y cuya relación con la unidad SI es

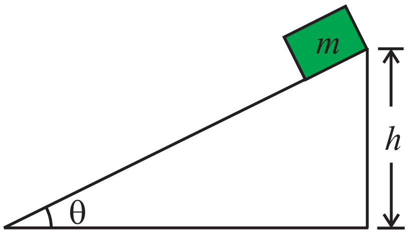
$$1\,\mathrm{eV} \equiv 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}.$$

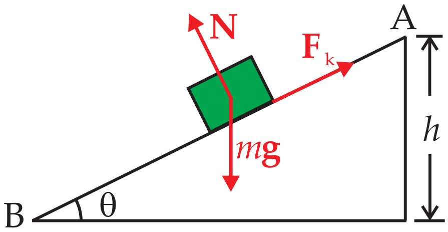
Un múltiplo de esta unidad bastante utilizado es el MeV, cuya relación es $1\,\mathrm{MeV} \equiv 10^6\,\mathrm{eV}$.

Ejemplo 3.4.
Un bloque de masa m, se suelta desde la parte más alta del plano inclinado de la figura. El coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es μ. Determine a) La velocidad del bloque, en el instante que llega a la base del plano inclinado. b) El ángulo mínimo a partir del cual tiene significado físico la velocidad.
Solución
Diagrama de cuerpo libre para el bloque

a) Por el teorema del trabajo y la energía, se tiene

$$W = \tfrac{1}{2} m v_B^2, \qquad (1)$$





donde el trabajo total realizado sobre el bloque, cuando se mueve entre las posiciones A y B, es

$$W = mgh(1-\mu\cot\theta). \qquad (2)$$

Reemplazando la ecuación (2) en la ecuación (1), se obtiene para la velocidad del bloque en el punto B

$$v_B = \sqrt{2gh(1-\mu\cot\theta)}. \qquad (3)$$

En la tabla siguiente, se indica la forma como varía el término entre paréntesis de la ecuación (3), donde NO significa que la velocidad no tiene significado físico.

$\theta(^o)$	10	15	30	45	60	90
μ						
0.2	*NO*	0.25	0.65	0.80	0.88	1.0
0.4	*NO*	*NO*	0.31	0.60	0.77	1.0
0.6	*NO*	*NO*	*NO*	0.40	0.65	1.0
0.8	*NO*	*NO*	*NO*	0.20	0.54	1.0
1.0	*NO*	*NO*	*NO*	0	0.42	1.0

Se observa que para velocidades con significado físico, si el ángulo es fijo menor es la velocidad del bloque a medida que aumenta el coeficiente de fricción, es decir, entre más ásperas sean las superficies. Ahora, para un coeficiente de fricción fijo, a mayor ángulo mayor es la velocidad del bloque en el punto B

b) Para que la velocidad tenga significado físico, de acuerdo con la ecuación (3), se debe satisfacer la condición

$$\tan\theta \geq \mu. \qquad (4)$$

Así, el ángulo mínimo a partir del cual la velocidad tiene significado físico, se obtiene al tomar la igualdad en la ecuación (4), esto es

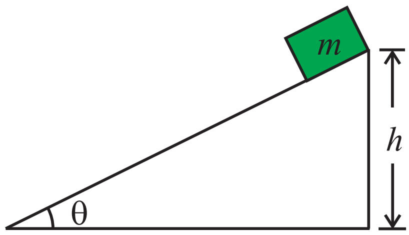
$$\theta_{\text{mín}} = \tan^{-1}\mu. \qquad (5)$$

En la tabla siguiente, se muestran los valores de $\theta_{\text{mín}}$ correspondiente a los valores del coeficiente de fricción considerados en la tabla anterior.

μ	$\theta_{mín}(^o)$
0.2	11.3
0.4	21.8
0.6	31.0
0.8	38.7
1.0	45.0

Se concluye entonces que entre más ásperas sean las superficies en contacto, mayor es el ángulo a partir del cual el bloque inicia el movimiento.

Ejercicio 3.3.
Un bloque de masa m, se suelta desde la parte más alta del plano inclinado de la figura. Suponiendo que las superficies en contacto son lisas, determine a) La velocidad del bloque, en el instante que llega a la base del plano inclinado. b) El ángulo mínimo a partir del cual tiene significado físico la velocidad. Compare los resultados con los del ejemplo 3.4.



3.6. Fuerzas conservativas y energía potencial

En esta sección se define un tipo muy importante de fuerzas que se presentan en la naturaleza, como son las fuerzas conservativas. Adicionalmente, se encuentra una relación matemática entre fuerza conservativa y la energía potencial.

3.6.1. Trabajo realizado por una fuerza constante

Como se ilustra en la figura 3.12, se considera una partícula de masa m sometida a la acción de una fuerza $\mathbf{F}$ constante en magnitud y dirección. Una condición se debe imponer sobre esta fuerza y es que no puede ser una fuerza de fricción (más adelante se da la razón de esta restricción

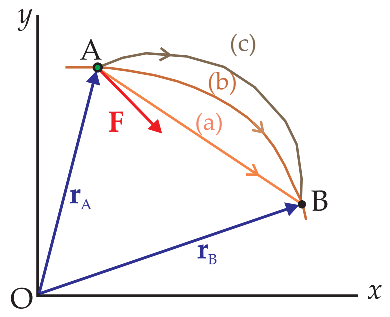


Figura 3.12: *Trabajo realizado por una fuerza constante.*

Para este caso la ecuación (3.5) se transforma en

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{F} \cdot \int_{A}^{B} \mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{B}} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{A}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La ecuación (3.12), indica que el trabajo realizado por una fuerza constante es independiente de la trayectoria seguida por la partícula, ya que sólo depende de las posiciones inicial y final. De este resultado se puede concluir que para las diferentes trayectorias mostradas en la figura 3.12, el trabajo realizado por la fuerza constante es el mismo, es decir, $W_{(\mathrm{a})} = W_{(\mathrm{b})} = W_{(\mathrm{c})}$.

3.6.2. Trabajo realizado por la fuerza gravitacional

Aunque este es un ejemplo de fuerza constante, para alturas cercanas a la superficie de la tierra, el trabajo realizado por ella es de gran importancia en muchas situaciones físicas. Para el caso mostrado en la figura 3.13, las componentes rectangulares del peso $m\mathbf{g}$ y de los vectores posición $\mathbf{r}_{\mathrm{A}}$ y $\mathbf{r}_{\mathrm{B}}$, están dadas por $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{A}}\mathbf{i} + y_{\mathrm{A}}\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{B}}\mathbf{i} + y_{\mathrm{B}}\mathbf{j}$. Reemplazando estas expresiones y efectuando los respectivos productos escalares, la ecuación (3.12) se transforma en

$$\begin{aligned} W &= mgy_{\mathrm{A}} - mgy_{\mathrm{B}} \\ &= -\Delta(mgy). \end{aligned} \quad (3.13)$$

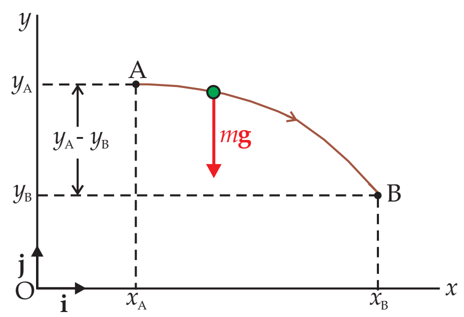


Figura 3.13: *Trabajo realizado por el peso.*

La ecuación (3.13) muestra, en este caso y como es de esperar, que el trabajo realizado por el peso de la partícula es independiente de la trayectoria seguida por ella, pues depende sólo de las posiciones inicial y final, en otras palabras, depende de la diferencia de alturas entre las posiciones A y B.

3.6.3. Trabajo realizado por la fuerza elástica de un resorte

Este es un ejemplo de fuerza variable que también posee gran importancia en la física. Se considera el sistema de la figura 3.14, que consiste en un cuerpo de masa m adherido a un resorte de constante elástica k y que puede moverse sobre una superficie horizontal lisa. En esta situación, las componentes rectangulares de la fuerza variable $\mathbf{F}$ y del vector desplazamiento $d\mathbf{r}$, están dadas por $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$ y $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\mathbf{i}$. Para determinar el trabajo realizado por la fuerza elástica del resorte, al llevar el cuerpo de la posición x_{A} a la posición x_{B}, se reemplazan la fuerza y el vector desplazamiento en la ecuación (3.5), obteniéndose luego de integrar y evaluar, la expresión

$$\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{A}}^2 - \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{B}}^2 \\ &= -\Delta(\tfrac{1}{2}kx^2). \end{aligned} \tag{3.14}$$

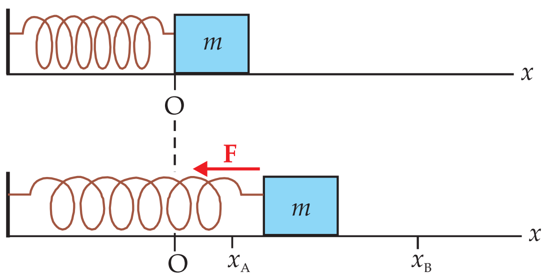


Figura 3.14: *Trabajo realizado por la fuerza elástica de un resorte.*

Aunque la fuerza es variable, el resultado obtenido en la ecuación (3.14) indica que de nuevo el trabajo realizado por la fuerza no depende de la trayectoria sino de las posiciones inicial y final.

Los dos casos anteriores, trabajo de la fuerza gravitacional y trabajo de la fuerza elástica, son dos ejemplos de un grupo de fuerzas que se presentan en la naturaleza y que se llaman *fuerzas conservativas*.

De forma general y matemáticamente, se define una fuerza conservativa $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x,y,z)$ de manera que el trabajo realizado por ella se puede expresar como la diferencia de los valores inicial y final de una cantidad escalar $E_{\mathrm{p}}(x,y,z)$, llamada *energía potencial*, es decir, la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x,y,z)$, es conservativa si cumple la condición

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &\equiv E_{\mathrm{pA}}(x,y,z) - E_{\mathrm{pB}}(x,y,z) \\ &= -\Delta E_{\mathrm{p}}(x,y,z). \end{aligned} \tag{3.15}$$

En conclusión, la ecuación (3.15) sólo es válida si la fuerza considerada es conservativa; además, muestra que la cantidad $E_{\mathrm{p}}(x,y,z)$ es función de las coordenadas x, y, z.

Al comparar las ecuaciones (3.13) y (3.14) con la ecuación (3.15), se observa que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional y el trabajo realizado por la fuerza elástica de un resorte satisfacen la definición de fuerza conservativa. Por consiguiente, se puede asignar una función de energía potencial a un sistema *cuerpo-tierra* y a un sistema *masa-resorte*. De este modo, la energía potencial gravitacional asociada al sistema *cuerpo-tierra* queda definida por

$$E_{\mathrm{p}}(y) \equiv mgy,$$

y la energía potencial elástica asociada al sistema *masa-resorte* por

$$E_{\mathrm{p}}(x) \equiv \tfrac{1}{2}kx^2.$$

Teniendo en cuenta estas dos definiciones, el trabajo realizado por la fuerza gravitacional se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} W &= E_{\mathrm{pA}}(y) - E_{\mathrm{pB}}(y) \\ &\equiv mgy_{\mathrm{A}} - mgy_{\mathrm{B}} \\ &= -\Delta E_{\mathrm{p}}, \end{aligned}$$

y el trabajo realizado por la fuerza elástica en la forma

$$\begin{aligned} W &= E_{\mathrm{pA}}(x) - E_{\mathrm{pB}}(x) \\ &= \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{A}}^2 - \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{B}}^2 \\ &= -\Delta E_{\mathrm{p}}(x). \end{aligned}$$

Se presenta una diferencia cuando el trabajo de una fuerza se expresa en función de la energía cinética y en función de la energía potencial. En el primer caso la expresión a utilizar es $W = \Delta E_{\mathrm{k}}$, y es válida independientemente de la fuerza que actúe sobre la partícula; en el segundo caso la expresión es $W = -\Delta E_{\mathrm{p}}$, de validez *únicamente* si la fuerza que actúa sobre la partícula es conservativa.

En sistemas donde se deba emplear el concepto de energía potencial, primero se debe definir lo que se conoce como el *nivel cero de energía potencial*, que corresponde a una posición arbitraria, dependiendo de la fuerza conservativa que se esté considerando y de la situación física particular.

Para un sistema cuerpo-tierra, el nivel cero de energía potencial gravitacional coincide con el origen de coordenadas, ya que en este caso la dependencia es lineal con la coordenada vertical. Para el caso de un sistema masa-resorte, el nivel cero de energía potencial elástica se toma en la posición donde la fuerza elástica se hace cero, es decir, en la posición donde el resorte no ha sufrido estiramiento alguno.

Cuando se trata de un sistema satélite-tierra, la función de energía potencial asociada al sistema es inversamente proporcional a la distancia r entre el satélite y la tierra, esto es, tiene la forma funcional $E_p \propto 1/r$. Es por ello que el nivel cero de energía potencial para este sistema se toma en el infinito, ya que allí la energía potencial se hace cero.

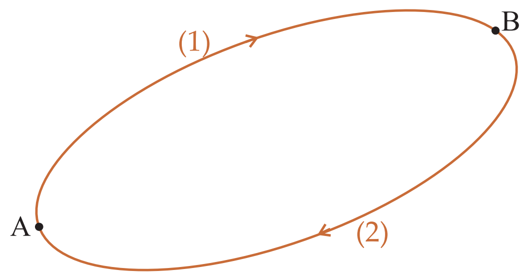


Figura 3.15: *Trabajo realizado en una trayectoria cerrada.*

Debido a las características de las fuerzas conservativas, se tiene otra forma de saber si una fuerza **F** es conservativa o no. Para ello se considera una partícula, que sometida a la fuerza **F**, se desplaza de la posición A a la posición B por la trayectoria (1) y luego de la posición B a la posición A por la trayectoria (2) de la figura 3.15. En forma matemática, si la fuerza que actúa sobre la partícula es conservativa, se debe cumplir la condición

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_B^A \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde la integral, con un círculo en el centro, significa que se integra a través de la trayectoria cerrada ABA.

La ecuación (3.16) permite saber si una fuerza dada es conservativa o no, es decir, es otra definición de fuerza conservativa. En el caso de la fuerza de fricción, se encuentra que el trabajo realizado por ella es diferente de cero ya que depende de la trayectoria; esta es la razón por la cual no se incluye dentro del grupo de fuerzas conservativas.

3.7. Conservación de la energía para una partícula

Sobre la partícula de la figura 3.16, de masa m, simultáneamente actúan varias fuerzas. De este modo, su resultante **F** realiza un trabajo W entre los puntos A y B de la trayectoria, dado por

$$W = \Delta E_k, \tag{3.17}$$

con $\Delta E_k = E_{kB} - E_{kA}$. Ahora, si todas fuerzas son conservativas, su resultante es conservativa y el trabajo realizado por ella es

$$W = -\Delta E_p, \tag{3.18}$$

donde $\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA}$.

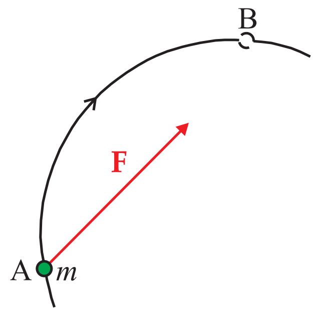


Figura 3.16: *Fuerza conservativa actuando sobre m.*

Como las ecuaciones (3.17) y (3.18) se refieren al trabajo realizado por la misma fuerza, se satisface la igualdad

$$E_{kB} + E_{pB} = E_{kA} + E_{pA},$$

donde se define la energía mecánica total, o simplemente energía total, en la forma

$$E \equiv E_k + E_p = \tfrac{1}{2}mv^2 + E_p(x,y,z).$$

$$E_A = E_B.$$

Como en la situación que se está analizando los puntos A y B son arbitrarios, se tiene que la energía total de una partícula permanece constante si todas las fuerzas a las que está sometida son conservativas.

Matemáticamente, para fuerzas conservativas

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + E_p(x,y,z) \\ &= \text{Constante.} \end{aligned} \tag{3.19}$$

La ecuación (3.19) permite definir una fuerza conservativa, como aquella que permite conservación de la energía, de ahí su nombre.

Casos particulares de la ecuación (3.19):

1. Para un cuerpo en caída libre, sistema cuerpo-tierra de la figura 3.18, la energía total se conserva por ser la fuerza gravitacional conservativa. Matemáticamente, se expresa en la forma

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= \text{Constante.} \end{aligned}$$

En este caso, cuando el cuerpo desciende la energía potencial se transforma en energía cinética, y cuando asciende la energía cinética se transforma en energía potencial. O sea, mientras el cuerpo se mueve verticalmente hay una transformación de un tipo de energía en otro.

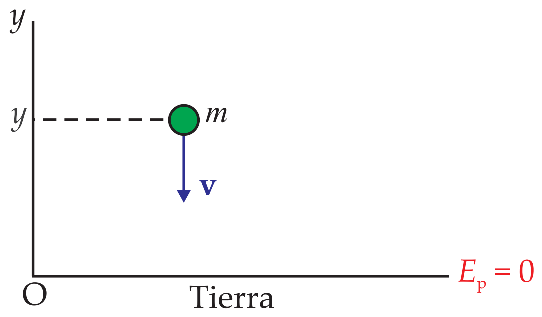


Figura 3.17: *Sistema cuerpo-tierra.*

2. Para el sistema masa-resorte de la figura 3.18, con movimiento sobre una superficie lisa, la energía total también se conserva ya que la fuerza elástica de un resorte es conservativa. Matemáticamente,

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= \text{Constante.} \end{aligned}$$

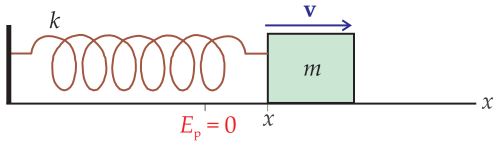


Figura 3.18: *Sistema masa-resorte.*

En esta situación, el cuerpo adquiere un movimiento que se repite a intervalos iguales de tiempo o de vaivén, tal que la energía permanece constante, o sea, que durante el movimiento de la partícula se tiene una transformación de energía cinética a potencial y viceversa.

Ejemplo 3.5.
Mediante el pequeño bloque de masa m, un resorte de constante k sufre una deformación d, como se muestra en la figura. Una vez que el bloque es dejado en libertad, se mueve sobre la superficie horizontal hasta el punto A, a partir del cual asciende por un plano inclinado. El bloque no está adherido al resorte y las superficies son lisas. a)Halle la rapidez del bloque cuando pasa por el punto A. b) Encuentre el desplazamiento máximo del bloque sobre el plano inclinado. c) Halle el valor de las cantidades obtenidas en los numerales anteriores si $k = 100\text{Nm}^{-1}$, $m = 5\text{g}$, $d = 2\text{cm}$ y $\theta = 35^{\text{o}}$.

Solución
a) En el trayecto horizontal actúan, la normal que no realiza trabajo, el peso que tampoco realiza trabajo y la fuerza elástica del resorte que es conservativa y actúa hasta el punto O. Así, el sistema es conservativo, esto es, se conserva la energía del

sistema cuando se mueve sobre la superficie horizontal. Matemáticamente

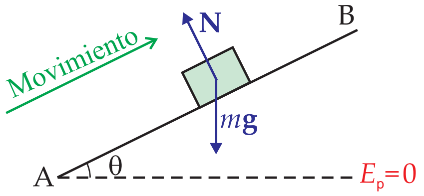
$$\tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 = \tfrac{1}{2}kd^2.$$

De este modo, cuando pasa por el punto A tiene una rapidez

$$v_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{k}{m}}d.$$

Por lo tanto, entre mayor sea la deformación inicial del resorte la rapidez en A es mayor, ya que existe una proporcionalidad directa entre la velocidad y la deformación.

b) Entre A y B sólo la componente del peso $mg\,\mathrm{sen}\,\theta$ realiza un trabajo negativo sobre el bloque, ya que se opone a su desplazamiento.



Como el sistema sigue siendo conservativo, con $\mathbf{v}_{\mathrm{B}} = 0$

$$mgS\mathrm{sen}\theta = \tfrac{1}{2}kd^2,$$

donde S es el máximo desplazamiento del bloque sobre el plano inclinado; así

$$S = \frac{kd^2}{2mg\mathrm{sen}\theta}.$$

De este resultado se tiene que para una deformación fija del resorte, a mayor ángulo de inclinación menor es el desplazamiento del bloque sobre el plano inclinado. Ahora, para un ángulo de inclinación fijo, entre mayor sea la deformación inicial del resorte mayor es el desplaza-miento del bloque sobre el plano inclinado.

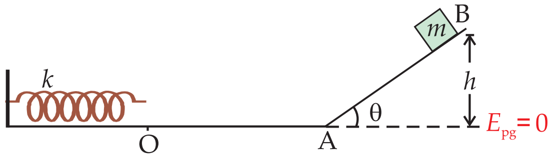
c) Reemplazando los valores dados, se encuentra que la rapidez cuando pasa por el punto A y el máximo desplazamiento sobre el plano inclinado son, respectivamente

$$\begin{aligned} v_A &= 2.8\,\mathrm{ms}^{-1}, \\ S &= 0.7\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

Pregunta
¿Entre qué puntos la velocidad del bloque es la misma que en A? ¿Por qué?

Ejercicio 3.3.
Comprobar que las dimensiones y unidades de las cantidades obtenidas en el ejemplo 3.5, son correctas.

Ejercicio 3.4.
Un pequeño bloque de masa m se suelta sobre un plano inclinado liso, desde una altura h respecto a su base. Luego de llegar a la base del plano inclinado, el bloque desliza sobre un superficie horizontal lisa hasta que se encuentra con un resorte de constante elástica k. a) Halle la rapidez del bloque cuando pasa por el punto A. b) Encuentre la máxima deformación del resorte. c) Determine el valor de las cantidades obtenidas en los numerales anteriores si $k = 100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $m = 5\,\mathrm{g}$, $h = 5\,\mathrm{cm}$ y $\theta = 35^{\mathrm{o}}$.



3.8. Fuerzas no conservativas

Se considera una partícula sometida a la acción de varias fuerzas simultáneamente aplicadas. Si al evaluar el trabajo realizado por estas fuerzas en una trayectoria cerrada, se encuentra que es diferente de cero, se tiene que al menos hay una fuerza que no permite que la energía se conserve, es decir, la energía mecánica se disipa y de manera no recuperable. A las fuerzas de este tipo se les conoce como *fuerzas no conservativas*.

La experiencia muestra que cuando se lanza un cuerpo sobre una superficie horizontal rugosa, el cuerpo pierde toda su energía mecánica que se transforma en calor y hace que las superficies en contacto se calienten. Por ello, *la fuerza de fricción es una fuerza no conservativa*.

En general, si sobre una partícula actúan simultáneamente fuerzas conservativas y no conservativas se tiene que el trabajo total, realizado por todas las fuerzas, es dado por

$$W_{\mathrm{T}} = W_{\mathrm{c}} + W_{\mathrm{nc}}\,,$$

donde W_c es el trabajo realizado por las fuerzas conservativas y W_{nc} el efectuado por las fuerzas no conservativas. Además, como siempre es válido que el trabajo total, realizado por todas las fuerzas, está dado por $W_{\mathrm{T}} = \Delta E_{\mathrm{k}}$, y para el caso de las fuerzas conservativas está dado por $W_{\mathrm{c}} = -\Delta E_{\mathrm{p}}$, se tiene que el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{nc}} &= \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} \\ &= E_{\mathrm{B}} - E_{\mathrm{A}} = \Delta E. \end{aligned} \qquad (3.20)$$

Cuando se determina el trabajo realizado por la fuerza de fricción, este es negativo, o sea, la energía total disminuye. Así, la ecuación (3.20) da la pérdida de energía total, debida a las fuerzas no conservativas. En cualquier caso, donde se presenten fuerzas no conservativas, representa una transformación de energía. En el caso de la fuerza de fricción, la energía mecánica se transforma en energía calórica. Este tema se tratará en la unidad de Termodinámica.

Ejemplo 3.6.
Una partícula de masa m se suelta desde el punto A del carril mostrado en la figura. Analizar el comportamiento energético de la partícula mientras se encuentra en movimiento sobre el carril, cuando a) No se considera la fricción. b) Se presenta fricción entre las superficies en contacto.

Solución
a) Entre A y B las fuerzas que actúan son el peso y la normal. La normal no realiza trabajo por ser perpendicular al desplazamiento y el peso, que es una fuerza conservativa, realiza trabajo. De este modo, entre A y B el sistema es conservativo, es decir, la energía total de la partícula se conserva. De acuerdo con esto, mientras la partícula desciende la energía potencial gravitacional se transforma en energía cinética. A partir del punto B, ni la normal ni el peso realizan trabajo, o sea que el sistema sigue siendo conservativo, de tal forma que el cuerpo se mueve con velocidad constante para garantizar que la energía total se conserve en esta parte de la trayectoria.

b) Cuando se presenta fricción entre las superficies en contacto, el sistema ya no es conservativo en ninguno de los tramos de la figura. En este caso, mientras desciende entre A y B, disminuye la energía potencial transformándose parte de ella en energía cinética y el resto disipándose en forma de calor, lo que conlleva a una disminución de la energía total. Igualmente, a partir de B, donde sólo se tiene energía cinética, la energía continúa disipándose en calor hasta que la partícula alcanza un estado de reposo. En síntesis, toda la energía mecánica que tenía la partícula inicialmente, se disipa completamente en calor.

Ejemplo 3.7.
Mediante el pequeño bloque de masa m, un resorte de constante k sufre una deformación d, como se muestra en la figura. Una vez que el bloque es dejado en libertad, se mueve sobre la superficie horizontal hasta el punto A, a partir del cual asciende por un plano inclinado. El bloque no está adherido al resorte, suponga que el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es μ y que la distancia OA es $2d$. a)Halle la rapidez del bloque cuando pasa por el punto A. b) Encuentre el desplazamiento máximo del bloque sobre el plano inclinado. c) Halle el valor de las cantidades obtenidas en los numerales anteriores si $k = 100\mathrm{Nm}^{-1}$, $m = 5\mathrm{g}$, $d = 2\mathrm{cm}$ y $\theta = 35^{\mathrm{o}}$ y $\mu = 0.4$.

Solución

a) En el trayecto horizontal, a diferencia del ejemplo 3.5, el sistema no es conservativo ya que se presenta fricción sobre el bloque y la no conservación de la energía exige que para este caso

$$-3\mu mgd = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 - \tfrac{1}{2}kd^2,$$

de donde se encuentra que la rapidez en el punto A es

$$v_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{k}{m}d^2 - 6\mu gd}.$$

Al comparar este resultado con el obtenido en el ejemplo 3.5, se tiene el término adicional $-6\mu gd$, que reduce la rapidez como consecuencia de la fricción que actúa sobre el bloque. Además, se presenta una restricción respecto a la rapidez, y es que sólo son posibles magnitudes de velocidad reales si se cumple la condición

$$\frac{kd}{m} \geq 6\mu g.$$

b) En el trayecto AB, el sistema sigue siendo no conservativo, lo que permite encontrar que el máximo desplazamiento sobre el plano inclinado es

$$S = \frac{kd^2 - 6\mu mgd}{2mg(\mathrm{sen}\theta + \mu\cos\theta)},$$

donde aparece el mismo término adicional debido a la fricción. En este caso, el desplazamiento tiene significado físico si el término del numerador es positivo.

c) Reemplazando valores se tiene que la rapidez y el máximo desplazamiento, respectivamente, están dados por

$$\begin{aligned} v_A &= 2.7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}, \\ S &= 0.4\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

3.9. Derivada direccional y energía potencial

En esta sección se determina otra relación importante entre una fuerza conservativa y su energía potencial asociada. Para ello se considera la fuerza conservativa **F** que actúa sobre la partícula, de la figura 3.16.

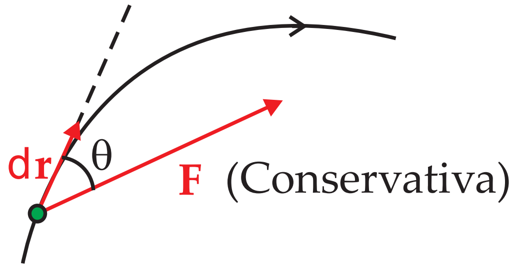


Figura 3.19: *La fuerza conservativa* **F** *y* d**r** *forman un ángulo* θ.

Teniendo en cuenta la definición de trabajo dada por la ecuación (3.4) y la definición de fuerza conservativa dada por la ecuación (3.15), el trabajo realizado por la fuerza conservativa en un intervalo de tiempo dt se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= F\cos\theta\,\mathrm{d}S \\ &= -\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}. \end{aligned}$$

Ahora, a partir de la figura 3.19, se obtiene

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{T}} &= F\cos\theta \\ &= -\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}S}. \end{aligned}$$

De este modo, cuando se conoce la forma funcional de la energía potencial con la coordenada S, esto es, $E_{\mathrm{p}}(S)$, es posible determinar la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento, correspondiente a esta coordenada. Esto es, la componente de la fuerza en una dirección determinada, es igual a menos la derivada de la energía potencial con respecto a la coordenada en esa dirección; por ello a esta derivada se le conoce como *derivada direccional* de la energía potencial $E_{\mathrm{p}}(S)$.

En este punto se debe hacer una distinción en lo referente a la derivada, ya que la energía potencial asociada a una fuerza conservativa puede ser función de una, dos ó tres coordenadas, dependiendo que el movimiento ocurra en una, dos ó tres dimensiones, es decir, depende del sistema que se esté analizando. Así, mientras en el movimiento de caída libre la energía potencial depende sólo de la coordenada vertical, en el caso del movimiento de la tierra alrededor del sol depende de dos coordenadas, y en general, para movimiento en tres dimensiones puede depender de tres coordenadas, tales como x, y, z.

En el caso simple de movimiento en una dimensión, donde $E_\mathrm{p} = E_\mathrm{p}(x)$, es posible obtener la fuerza conservativa que actúa sobre la partícula paralelamente al eje x, mediante la expresión

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(x)}{\mathrm{d}x},$$

donde se emplea el concepto matemático de derivada total, al utilizar el operador diferencial $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$. En dos dimensiones, por ejemplo para movimiento en el plano xy, la energía potencial asociada a la respectiva fuerza conservativa puede ser de la forma $E_\mathrm{p} = E_\mathrm{p}(x,y)$, donde simultáneamente aparecen las variables x, y. Así, mediante el concepto de *derivada direccional* es posible determinar las componentes de la fuerza en las direcciones x y y. Para ello se emplea el concepto de *derivada parcial*, que permite derivar la función respecto a una de las variables y tomar la otra variable como si fuera una constante. En este caso se utiliza el símbolo ∂ en lugar de la letra d para una dimensión. De este modo, las componentes rectangulares de la fuerza conservativa están dadas por

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial E(x,y)}{\partial x} \text{ con } y = \text{Constante}, \\ F_y &= -\frac{\partial E(x,y)}{\partial y} \text{ con } x = \text{Constante}. \end{aligned}$$

Aunque se ha tratado la forma funcional de la energía potencial en coordenadas rectangulares, lo anterior también es válido para el caso de coordenadas polares, como se muestra posteriormente.

Cuando se trata el movimiento de una partícula en tres dimensiones, la energía potencial en coordenadas rectangulares tiene la forma funcional $E_\mathrm{p} = E_\mathrm{p}(x,y,z)$. Por consiguiente, al generalizar se tiene que las componentes rectangulares de la fuerza conservativa correspondiente están dadas por

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial E_\mathrm{p}(x,y,z)}{\partial x}, \text{ con } y \text{ y } z \text{ constantes}, \\ F_y &= -\frac{\partial E_\mathrm{p}(x,y,z)}{\partial y}, \text{ con } x \text{ y } z \text{ constantes}, \\ F_z &= -\frac{\partial E_\mathrm{p}(x,y,z)}{\partial z}, \text{ con } x \text{ y } y \text{ constantes}, \end{aligned}$$

donde de nuevo se ha empleado el concepto de derivada parcial. A diferencia del caso de dos dimensiones, cuando se deriva respecto a una variable se toman las otras dos variables como si fueran constantes.

Continuando con el concepto de derivada direccional, al tener en cuenta las relaciones anteriores, la fuerza conservativa en componentes rectangulares se expresa en la forma

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial E_\mathrm{p}(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial E_\mathrm{p}(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial E_\mathrm{p}(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{k},$$

o equivalentemente

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) E_\mathrm{p}(x,y,z),$$

donde se define el operador *nabla* como

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

O sea,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\mathrm{grad}\, E_\mathrm{p} \\ &= -\nabla E_\mathrm{p}. \end{aligned}$$

Así, la fuerza es igual a menos el gradiente de la energía potencial. En general, al aplicar el operador nabla a un escalar se obtiene un vector, y a la operación correspondiente se le conoce como gradiente. Por otro lado, este resultado es de validez general independiente del sistema de coordenadas que se esté empleando, solo que la forma del operador es diferente para cada sistema.

Casos particulares

1. En el caso gravitacional, como se muestra en la figura 3.20, la energía potencial gravitacional está dada por $E_\mathrm{p}(y) = mgy$, entonces

$$\begin{aligned} F_y &= -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(y)}{\mathrm{d}y} \\ &= -mg, \end{aligned}$$

que corresponde al negativo de la magnitud del peso de la partícula, donde el signo menos indica que esta fuerza apunta en sentido vertical hacia abajo, como es de esperarse.

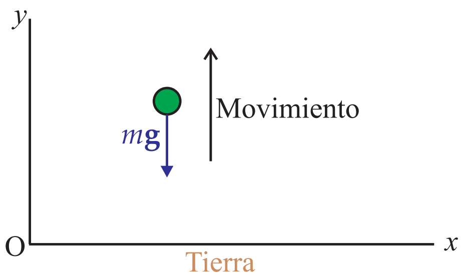


Figura 3.20: *Fuerza gravitacional.*

Como ocurre en el caso general, la fuerza gravitacional es perpendicular a las superficies donde la energía potencial es constante y que se conocen como superficies equipotenciales o de igual potencial.

En la figura 3.20, la superficie de la tierra es una superficie equipotencial, igual que las superficies paralelas a la superficie terrestre, y la fuerza es perpendicular a dichas superficies.

2. Para un sistema masa-resorte, la función de energía potencial asociada a la partícula de la figura 3.21, está dada por $E_{\rm p}(x) = \frac{1}{2}kx^2$, entonces la fuerza elástica correspondiente está dada por

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{{\rm d}E_{\rm p}(x)}{{\rm d}x} \\ &= -kx, \end{aligned}$$

que no es mas que la ley de Hooke.

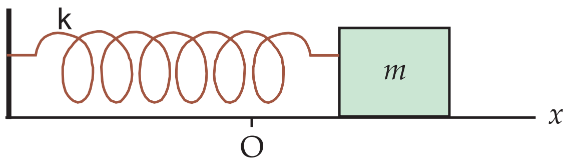


Figura 3.21: *Fuerza elástica de un resorte.*

3. En el caso de movimiento en un plano, empleando las coordenadas polares r y θ, si se conoce la energía potencial $E_{\rm p}(r,\theta)$, de acuerdo con la figura 3.22 se tiene

- En la dirección radial la componente de la fuerza es F_r y el desplazamiento respectivo

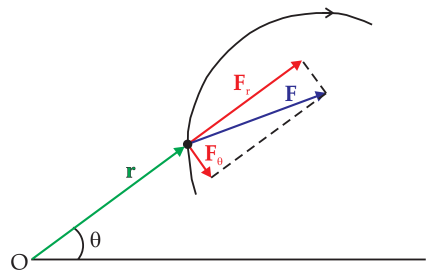


Figura 3.22: *Fuerza radial y transversal.*

${\rm d}S = {\rm d}r$, entonces,

$$F_r = -\frac{\partial E_{\rm p}(r,\theta)}{\partial r}.$$

- Ahora, en la dirección transversal la componente de la fuerza es F_θ y el desplazamiento correspondiente es ${\rm d}S = r{\rm d}\theta$, así, en esta dirección la componente de la fuerza se obtiene mediante la expresión

$$F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_{\rm p}(r,\theta)}{\partial \theta}.$$

En sistema tales como, tierra-luna, sol-tierra, o el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno, la energía potencial asociada sólo depende de la distancia de separación r entre los cuerpos interactuantes, o sea, es independiente de la coordenada θ. De este modo, la componente transversal es cero, y la fuerza al tener únicamente componente radial, es tal que su línea de acción pasa por un punto fijo correspondiente al centro de fuerza. En los casos que se presenta esta situación, se dice que la *fuerza es central*. Así, para una fuerza central la energía potencial sólo depende de la distancia de la partícula al centro de fuerza, lo que permite afirmar que *las fuerzas centrales son conservativas*.

Para *fuerzas no centrales* se tiene una componente en la dirección transversal y la magnitud del vector $|\mathbf{r}\times\mathbf{F}|$ está dada por

$$|\mathbf{r}\times\mathbf{F}| = F_\theta r = \frac{\partial E_{\rm p}(r,\theta)}{\partial \theta}.$$

Ahora, como

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F} = \frac{{\rm d}\mathbf{L}}{{\rm d}t},$$

se tiene que al depender la energía potencial de la coordenada θ el momento angular varía con el tiempo mientras la partícula se encuentra en movimiento. Por lo tanto, siempre que la energía potencial depende de θ, el producto $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es diferente de cero, lo que genera un cambio en el vector momento angular en dirección perpendicular al plano del ángulo θ. 3.10.

3.10. Movimiento rectilíneo bajo fuerzas conservativas

Cuando sólo actúan fuerzas conservativas sobre una partícula, mediante consideraciones de energía, es posible resolver completamente el problema de la dinámica, es decir, se puede determinar la posición de la partícula en función del tiempo. Como ejemplo, se considera una partícula de masa m que se mueve sobre una trayectoria coincidente con el eje x, debido a la acción de una fuerza conservativa. Esto permite asociarle una función de energía potencial de la forma $E_\mathrm{p}(x)$.

Como el sistema es conservativo, la ley de conservación de la energía exige que

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + E_\mathrm{p}(x) \\ &= \text{Constante}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Partiendo de la ecuación (3.21) se puede encontrar la posición de la partícula en función del tiempo, siempre y cuando se conozca la forma funcional de la energía potencial con la posición x. Ahora, si se cumplen las condiciones impuestas, se despeja la velocidad de la ecuación (3.21), obteniéndose la expresión

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}\{E - E_\mathrm{P}(x)\}}, \tag{3.22}$$

donde se ha empleado la definición de velocidad.

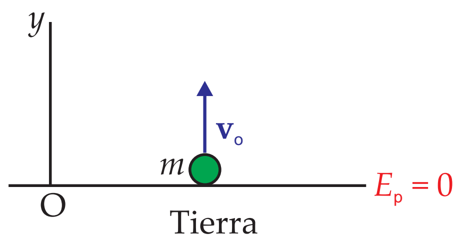
Finalmente, partiendo de la ecuación (3.22), separando variables e integrando, se llega a la expresión

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_\mathrm{o}}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\{E - E_\mathrm{p}(x)\}^{1/2}} = t, \tag{3.23}$$

donde por conveniencia se ha tomado $t_\mathrm{o} = 0$.

De este modo, mediante la ecuación (3.23) es posible determinar la posición de la partícula si se conoce la forma como varía la energía potencial con la coordenada x.

Ejemplo 3.8.
Obtenga, con ayuda de la ecuación (3.23), la posición en función del tiempo para una partícula de masa m que se lanza desde la tierra verticalmente hacia arriba con velocidad $\mathbf{v}_\mathrm{o}$.
Solución



De acuerdo con el sistema de referencia mostrado en la figura, la energía potencial en función de coordenada y es $E_\mathrm{P}(y) = mgy$. De esta forma, la ecuación (3.23) adquiere la forma

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{[E - mgy]^{1/2}} = t.$$

Donde luego de integrar, evaluar y simplificar, es posible llegar a

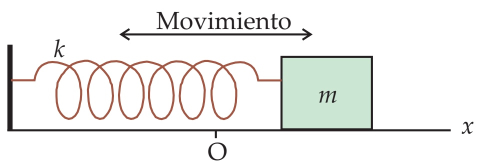
$$y(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}}t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Como en el instante de lanzar la partícula, $t_o = 0$, la energía total E es completamente cinética, se tiene que $E = \frac{1}{2}mv_\mathrm{o}^2$, lo cual indica que el coeficiente del tiempo corresponde a la velocidad inicial, es decir,

$$y(t) = v_\mathrm{o}t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

que es la ecuación cinemática de posición para un cuerpo que se mueve verticalmente sometido a la aceleración de la gravedad, esto es en caída libre, como se encontró en la unidad de cinemática de una partícula por un método diferente.

Ejemplo 3.9.
Obtenga la ecuación cinemática de posición para una partícula de masa m que se mueve sobre una superficie horizontal lisa y sujeta a un resorte de constante elástica k, como se ilustra en la figura.



Solución
En este caso, la función de energía potencial está dada por $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Reemplazando en la ecuación (3.23), se obtiene

$$(m/2)^{1/2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{[E-\frac{1}{2}kx^2]^{1/2}} = t,$$

donde luego de integrar, evaluar y simplificar se llega a la expresión

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}}\,\mathrm{sen}\left[\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} t\right].$$

que tiene la forma $x(t) = A\mathrm{sen}\omega t$, con $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$, y $\omega = (k/m)^{1/2}$. Este resultado corresponde al movimiento periódico, o más precisamente al movimiento armónico simple, adquirido por un cuerpo cuando se encuentra sujeto a un resorte.

3.11. Curvas de energía potencial

En muchas situaciones físicas, para sistemas conservativos, es posible conocer gráficamente la forma como varía la energía potencial con las coordenadas. Su conocimiento es de gran importancia ya que permite obtener información cualitativa sobre el comportamiento del sistema, incluyendo los tipos de movimiento que se pueden presentar. Primero se analiza el caso particular de un sistema masa-resorte y luego se hace un análisis más general.

1. *Sistema masa-resorte*. Para el caso de un cuerpo sometido a la fuerza elástica de un resorte, sistema conocido como *oscilador armónico*, la figura 3.23 muestra la variación de la energía potencial en función de la coordenada x. Esto es, se supone que el cuerpo se mueve sobre una superficie horizontal lisa que se hace coincidir con el eje de coordenadas.

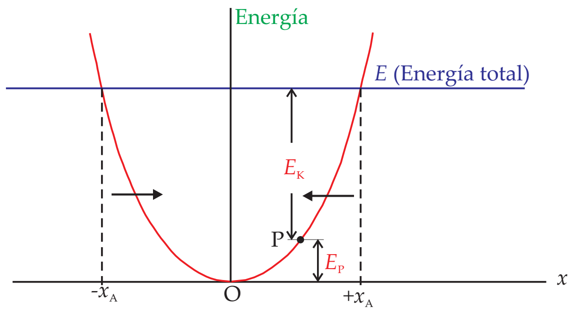


Figura 3.23: *Variación de la energía potencial elástica.*

Si se considera un punto sobre la curva, tal como P en la figura 3.23, la conservación de la energía exige que $E = E_k + E_p =$ Constante, ya que la fuerza elástica es conservativa.

En la región de las x positivas, la energía potencial aumenta a medida que x aumenta y la curva es creciente, o sea que la pendiente es positiva, por lo tanto,

$$\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} > 0,$$

y por la relación entre fuerza conservativa y energía potencial se tiene que

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} < 0.$$

Así, el signo menos indica que la fuerza apunta hacia la izquierda, es decir, hacia la posición de equilibrio. Esto se representa en la figura 3.23, mediante la flecha horizontal dirigida hacia la izquierda.

Por otro lado, en la región de las x negativas, la energía potencial disminuye a medida que x aumenta y la curva es decreciente, o sea que la pendiente es negativa, de este modo,

$$\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} < 0,$$

y por la relación entre fuerza conservativa y energía potencial se tiene que

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} > 0,$$

en este caso, como la pendiente es negativa, el signo menos indica que la fuerza apunta hacia la derecha, es decir, apunta de nuevo hacia la posición de equilibrio. Esto se representa en la figura 3.23, mediante la flecha horizontal dirigida hacia la derecha.

Este análisis cualitativo, muestra que la fuerza ejercida por el resorte corresponde a una *fuerza restauradora*, ya que siempre tiende a llevar el cuerpo hacia la posición de equilibrio. Por esta razón, a una distribución de energía potencial como la mostrada en la figura 3.23, se le llama *pozo de potencial* ya que la partícula está obligada a permanecer entre las posiciones $-x_A$ y $+x_A$.

En la posición particular $x = 0$, centro del pozo de potencial, la pendiente de la recta tangente a la curva es nula, esto es

$$\frac{dE_p(x)}{dx} = 0.$$

Por consiguiente,

$$F = -\frac{dE_p(x)}{dx} = 0.$$

lo que indica que la fuerza neta es cero, o sea que el cuerpo se encuentra instantáneamente en equilibrio. Por esta razón se le denomina *posición de equilibrio*. En este caso, si el cuerpo se desplaza un poco de dicha posición, la fuerza restauradora tiende a mantenerlo en esa posición; es por ello que este es un punto de *equilibrio estable*.

2. *Sistema conservativo en general*. En la figura 3.24, se muestra de manera general, la forma como varía la energía potencial para un cuerpo sometido a una fuerza conservativa y que posee movimiento rectilíneo a lo largo del eje x.

Como la energía cinética es una cantidad positiva, la ley de conservación de la energía exige que la energía total de la partícula debe ser mayor que la energía potencial, esto es

$$E - E_p(x) = E_k \geq 0.$$

Si esta relación no se satisface, llevaría a una velocidad imaginaria que no tiene significado

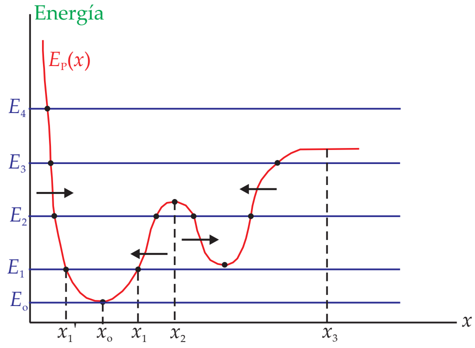


Figura 3.24: *Variación general de la energía potencial, $E_p(x)$.*

físico. A las regiones donde se presenta esta situación, se les conoce como *regiones clásicamente prohibidas*.

Así, para que la relación se pueda satisfacer, es necesario que

$$E \geq E_p(x). \qquad (3.24)$$

En la figura 3.24, la ecuación (3.24) se satisface para energías totales mayores que E_o, esto es, la energía mínima de la partícula con significado físico es E_o, pues para energías menores la energía potencial sería mayor que la energía total.

Cuando la partícula adquiere la energía total E_o, toda su energía es potencial y su energía cinética es nula, es decir, la partícula se encuentra en reposo en x_o si $E = E_o$.

Para una energía mayor que E_o, tal como E_1 en la figura 3.24, la partícula sólo se puede mover entre las posiciones x_1 y x_1' ya que únicamente entre estos dos puntos se cumple la condición impuesta por la ecuación (3.24). De este modo, si la partícula parte de la posición x_o, su velocidad disminuye al acercarse a x_1 ó x_1', donde la partícula se detiene instantáneamente y es obligada a cambiar el sentido de movimiento. Estas dos posiciones extremas se conocen como *puntos de retorno* del movimiento y la partícula con energía E_1 se comporta como en el caso de un sistema masa-resorte, esto es, se encuentra en un pozo de potencial.

Para la energía mayor E_2, en la figura 3.24 se presentan cuatro puntos de retorno, o sea, la partícula puede oscilar en cualquiera de los dos pozos de potencial, con la condición de que si se encuentra en un pozo no puede pasar al otro. ¿Por qué?

Para la energía E_3, se tienen dos puntos de retorno y mientras la partícula esté en movimiento entre ellos, la energía cinética aumenta si la energía potencial disminuye y viceversa.

Para una energía E_4 sólo hay un punto de retorno. Si la partícula inicialmente tiene movimiento en el sentido negativo de las x, se detiene en el punto de retorno y luego adquiere movimiento en el sentido positivo de las x, aumentando su velocidad al disminuir la energía potencial y la disminuirá al aumentar la energía potencial.

Como se analizó antes, en x_o la energía potencial es mínima, por lo que la pendiente de la recta tangente a la curva es cero y por ende la fuerza es cero. Si la partícula se encuentra inicialmente en reposo en x_o, permanecerá en ese estado mientras no se incremente su energía total. De este modo, si la partícula se mueve ligeramente en cualquier sentido, esta tiende a regresar y oscilará respecto a la posición de equilibrio. A la posición x_o , se le conoce como una posición de *equilibrio estable*.

Por otro lado, en x_2, la energía potencial se hace máxima, o sea, la pendiente de la recta tangente a la curva es cero y de nuevo la fuerza es cero. Si la partícula está inicialmente en reposo en este punto, permanecerá en reposo; pero si la partícula se mueve a partir de esta posición, por pequeño que sea el desplazamiento, la fuerza tiende a alejarla aún más de la posición de equilibrio; por ello a esta posición se le denomina de *equilibrio inestable*.

En la vecindad de x_3, la energía potencial es constante y por tanto la pendiente de la recta tangente a la curva es cero o sea que la fuerza nuevamente es cero. Aquí se tiene un intervalo de *equilibrio indiferente* y la partícula se quedará donde se le coloque, al no actuar ninguna otra fuerza sobre ella.

En síntesis, si se conoce la forma como varía la energía potencial con la posición, en la región donde se mueve un cuerpo, es posible obtener mucha información cualitativa sobre su movimiento.

Igual que en el caso del oscilador armónico, si la curva crece con el incremento de x, la fuerza está dirigida hacia la izquierda, es decir, es negativa, y si la curva decrece con el incremento de x, la fuerza estará dirigida hacia la derecha, o sea que es positiva. El sentido de la fuerza está indicado en la figura 3.24 por medio de vectores horizontales.

3.12. Colisiones

Se habla de una colisión, cuando ocurre una interacción entre dos o más partículas, en un intervalo muy corto de tiempo y en una región limitada del espacio.

En toda colisión, la interacción entre las partículas altera su movimiento y en general se presenta un intercambio de momento lineal y de energía. Lo anterior, no significa necesariamente que las partículas hayan estado en contacto físico. En general, se quiere indicar que ha ocurrido una interacción cuando las partículas estaban próximas como se muestra en la región encerrada de la figura 3.25 para el caso de dos partículas. Cuando se presenta contacto físico entre las partículas, se acostumbra denominar la colisión como un *choque*, como ocurre por ejemplo entre dos bolas de billar.

En algunos casos, las partículas antes de un choque son diferentes a las partículas después del choque, como ocurre cuando chocan el átomo A con la molécula BC, dando un resultado final, por ejemplo, de aparecer la molécula AB y el átomo C, esto es $A + BC \leftrightarrow AB + C$; esta es la forma como ocurren muchas reacciones químicas. En cambio, se dice que ocurre una *dispersión*, cuando en un choque las partículas iniciales son las mismas partículas finales.

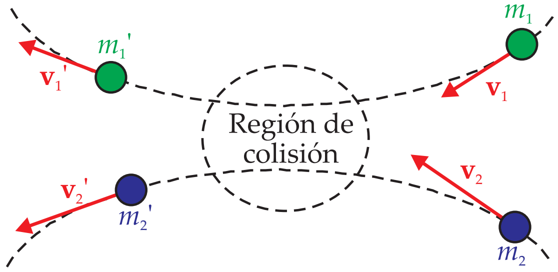


Figura 3.25: *Colisión entre dos partículas.*

Como en una colisión únicamente intervienen fuerzas internas, para el sistema formado por las partículas que interactúan, tanto el momento lineal total del sistema como la energía total del sistema se conservan.

Así, el *momento lineal total de un sistema es igual antes y después de una colisión*. Matemáticamente y para el caso de dos partículas se tiene

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \tag{3.25}$$

donde $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ son los momentos lineales de cada una de las partículas antes de la colisión, $\mathbf{p}'_1$ y $\mathbf{p}'_2$ los momentos lineales de cada una de las partículas después de la colisión.

Comúnmente, la ecuación (3.25) se escribe en la forma

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m'_1\mathbf{v}'_1 + m'_2\mathbf{v}'_2,$$

donde m_1, $m_2$son las masas de las partículas antes de la colisión y m'_1, m'_2las masas después de la colisión.

En general, uno de los objetivos al analizar una colisión es poder relacionar las velocidades de las partículas antes y después que esta ocurra. Para el caso de una colisión en dos dimensiones y entre dos partículas, si se conocen las velocidades antes de la colisión se tienen cuatro incógnitas, correspondientes a las componentes de las velocidades de cada partícula en las dos dimensiones; pero como la conservación del momento lineal sólo proporciona dos ecuaciones, una en cada dirección, es necesario obtener más información y para ello se recurre a la conservación de la energía.

Para considerar la conservación de la energía, se define el *factor de colisión* Q en la forma

$$Q \equiv E'_k - E_k,$$

donde E_k y E'_k son, respectivamente, las energías cinéticas totales del sistema antes y después de la colisión.

Para el caso de dos partículas que colisionan, el factor de colisión adquiere la forma

$$\begin{aligned} Q = &\left(\tfrac{1}{2}m'_1 v'^2_1 + \tfrac{1}{2}m'_2 v'^2_2\right) \\ &-\left(\tfrac{1}{2}m_1 v^2_1 + \tfrac{1}{2}m_2 v^2_2\right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dependiendo del valor en el factor de colisión, puede ocurrir

i) Que la colisión sea *elástica*, esto se presenta cuando $Q = 0$ y en este caso, no hay cambio en la energía cinética del sistema, o sea, $E'_k = E_k$.

ii) Que la colisión sea *inelástica*, ello se presenta cuando $Q \neq 0$ y en esta situación, la energía cinética aumenta si $Q > 0$ o disminuye si $Q < 0$. En el primer caso, las partículas al colisionar desprenden parte de su energía interna y en el segundo absorben parte de la energía mecánica intercambiada en la colisión.

Si después del choque sólo aparece una partícula, se dice que se tiene una *colisión completamente inelástica* o *plástica*.

El *parámetro de impacto b*, es una cantidad que permite saber si una colisión ocurre en una o dos dimensiones. Este parámetro está dado por la distancia de separación b entre la línea de movimiento de la partícula incidente y la línea paralela que pasa por la otra partícula, como se muestra en la figura 3.26.

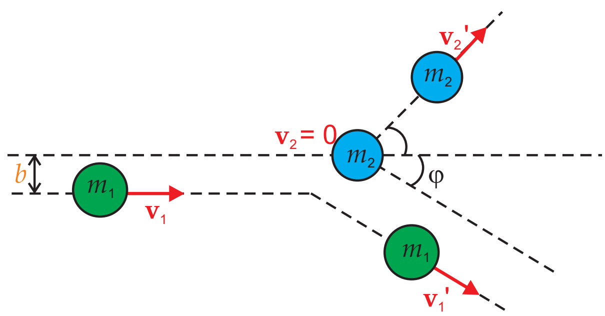


Figura 3.26: *Parámetro de impacto.*

De este modo, el parámetro de impacto es la distancia por la cual una colisión deja de ser frontal. Una colisión frontal, o en una dimensión, corresponde a $b = 0$ y valores mayores que cero para b, indican que la colisión es oblicua, o en dos dimensiones.

Ejemplo 3.10.
Como se muestra en la figura, un bloque de masa m_1 y con velocidad $\mathbf{v}_1$, choca frontalmente con un segundo bloque de masa m_2 inicialmente en reposo. Analice la colisión de los bloques si esta es a) completamente inelástica, b) elástica. c) Sabiendo que $m_1 = 300\,\text{g}$, $m_2 = 700\,\text{g}$ y $v_1 =$

$10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, halle los valores de las cantidades obtenidas en los numerales anteriores.

Solución
Como en toda colisión se conserva el momento lineal total del sistema, la ecuación (3.25) adquiere la forma

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2', \qquad (1)$$

donde se ha tomado como positivo el sentido inicial de movimiento para m_1.

Por otro lado, por la conservación de la energía, la ecuación (3.26) para el factor de colisión, se transforma en

$$Q = \left(\tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2\right) - \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2. \quad (2)$$

a) Cuando la colisión es completamente inelástica, después del choque aparece sólo una partícula de masa $m_1 + m_2$ con velocidad $v_1' = v_2' = V$.

Así, mediante la ecuación (1) se encuentra que la velocidad final del sistema tiene la forma

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \qquad (3)$$

Por consiguiente, independientemente de la relación entre las masas m_1 y m_2, después de la colisión plástica, la velocidad del sistema es menor y apunta en el mismo sentido que la velocidad con la cual incide el bloque de masa m_1.

Igualmente, para el factor de colisión, la ecuación (2) permite llegar a

$$Q = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2. \qquad (4)$$

Equivalentemente, en esta colisión, parte de la energía cinética del sistema se transforma en energía interna ya que $Q < 0$, sin depender de la relación entre las masas m_1 y m_2, o sea que la colisión es inelástica.

b) Si la colisión es elástica, el factor de colisión es nulo y las ecuaciones (1) y (2) se pueden escribir, respectivamente, en la forma

$$m_1(v_1' - v_1) = -m_2 v_2', \qquad (5)$$

$$m_1(v_1' - v_1)(v_1' + v_1) = -m_2 v_2'^2. \qquad (6)$$

Dividiendo las ecuaciones (5) y (6) se obtiene

$$v_1' + v_1 = v_2'. \qquad (7)$$

Finalmente, por medio se las ecuaciones (5) y (7), luego de simplificar se encuentra que las velocidades de los bloques después del choque son

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_2', = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \qquad (8)$$

En esta colisión, la velocidad del bloque m_2 tiene el mismo sentido que la velocidad de incidencia de m_1. En cambio, el sentido de movimiento de m_1 después de la colisión, depende de la relación entre las masas de los bloques, esto es, si $m_1 > m_2$ el bloque de masa m_1 se mueve en el mismo sentido que m_2; si $m_1 < m_2$ el bloque de masa m_1 se mueve en sentido opuesto a m_2, y si $m_1 = m_2$ el bloque de masa m_1 queda en reposo después de la colisión.

c) Reemplazando valores, con $m_1 = 0.3\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 0.7\,\mathrm{kg}$, se tiene

- Para la colisión completamente inelástica, por las ecuaciones (3) y (4), se encuentra

$$\begin{aligned} V &= 3.0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}, \\ Q &= -10.5\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

- Para la colisión elástica, la ecuación (8) lleva a los valores

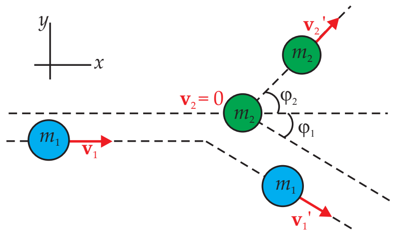
$$\begin{aligned} v_1' &= -4.0\mathrm{ms}^{-1}, \\ v_2' &= 6.0\mathrm{ms}^{-1}. \end{aligned}$$

El signo menos en la velocidad de m_1, significa que este bloque rebota en el choque por cumplirse la relación $m_1 < m_2$.

Ejercicio 3.5.
Como se muestra en la figura, un bloque de masa m_1 y con velocidad $\mathbf{v}_1$ hacia la derecha, choca frontalmente con un segundo bloque de masa m_2 que inicialmente se mueve hacia la izquierda con velocidad $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$. Analice la colisión de los bloques si esta es a) completamente inelástica, b) elástica. c) Sabiendo

que $m_1 = 300\,\text{g}$, $m_2 = 700\,\text{g}$ y $v_1 = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, halle los valores de las cantidades obtenidas en los numerales anteriores.

Ejemplo 3.11.
El cuerpo de la figura de masa m_1 y velocidad $\mathbf{v}_1$, tiene una colisión oblicua con el cuerpo de masa m_2 inicialmente en reposo. a) Determine la magnitud de la velocidad de los bloques inmediatamente después del choque, si las masas después de la colisión se mueven en las direcciones mostradas. b) Resolver para $m_1 = 0.2$kg, $m_2 = 0.3$kg, $v_1 = 15.0\text{ms}^{-1}$, $\varphi_1 = 30^{\text{o}}$ y φ=40$^{\text{o}}$. ¿Es la colisión elástica o inelástica?



Solución
a) Como el momento lineal total de las dos partículas se conserva en la colisión, la ecuación (3.25) adquiere la forma

$$m_1\mathbf{v}_1 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'.$$

Descomponiendo las velocidades en sus componentes rectangulares, se obtiene para las direcciones x y y, respectivamente, las expresiones

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos\varphi_1 + m_2 v_2' \cos\varphi_2, \quad (1)$$

$$0 = -m_1 v_1' \text{sen}\varphi_1 + m_2 v_2' \text{sen}\varphi_2. \quad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2), se obtiene

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{\text{sen}\varphi_2}{\text{sen}(\varphi_1+\varphi_2)} v_1, \\ v_2' &= \frac{m_1}{m_2}\frac{\text{sen}\varphi_1}{\text{sen}(\varphi_1+\varphi_2)} v_1. \end{aligned}$$

De estos resultados se tiene que para valores fijos de φ_1 y φ_2, la velocidad de m_1 después del choque es independiente de la masa de los cuerpos, mientras que para m_2 la velocidad sí de-pende de la relación entre las masas de los cuerpos.

b) Reemplazando valores se encuentra que la magnitud de las velocidades son

$$\begin{aligned} v_1' &= 10.3\text{ms}^{-1}, \\ v_2' &= 5.3\text{ms}^{-1}. \end{aligned}$$

Al calcular el factor de colisión, se encuentra que la colisión es inelástica ya que $Q = -7.7$J. De este modo, parte de la energía mecánica se transforma en energía interna de las partículas.

3.13. Movimiento bajo fuerzas centrales conservativas

Como se trata de fuerzas centrales conservativas, estas sólo tienen componente en la dirección radial, es decir, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Se considera una partícula de masa m sometida a una fuerza central $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, que por ser conservativa se le puede asociar una función de energía potencial dependiente únicamente de la distancia de la partícula al centro de fuerza, es decir, $E_\text{p} = E_\text{p}(r)$. De este modo, la energía total adquiere la forma

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + E_\text{p}(r). \qquad (3.27)$$

Como se sabe, la velocidad de la partícula en coordenadas polares se puede expresar en la forma

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2,$$

donde al emplear las definiciones $v_r = \text{d}r/\text{d}t$ y $v_\theta = r\text{d}\theta/\text{d}t$, la velocidad se puede escribir en la forma

$$v^2 = \left(\frac{\text{d}r}{\text{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\text{d}\theta}{\text{d}t}\right)^2. \qquad (3.28)$$

En la ecuación (3.28) aparecen las coordenadas polares r y θ. El objetivo en esta sección es resolver completamente el problema dinámico, esto significa determinar las coordenadas en función del tiempo, es decir, $r(t)$ y $\theta(t)$.

Debido a que la fuerza es central, el momento angular es una constante del movimiento. Ahora, utilizando la definición de momento angular y las expresiones para las componentes de velocidad radial y transversal, se encuentra que el momento angular satisface las expresiones

$$\begin{aligned} L &= mr^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) \\ r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= \frac{L^2}{(mr)^2}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde el momento angular es una constante, esto es, $L =$ Constante.

Reemplazando la ecuación (3.29) en la ecuación (3.28) se encuentra que el cuadrado de la rapidez está dado por

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L^2}{(mr)^2}. \tag{3.30}$$

Además, mediante las ecuaciones (3.30) y (3.27) se obtiene para la energía total, la expresión

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_{\mathrm{p}}(r). \tag{3.31}$$

Comparando la ecuación (3.31) con la ecuación (3.27) para la energía mecánica total de la partícula, en el caso de un sistema conservativo, es posible considerar que la partícula en movimiento está sometida a una energía potencial efectiva, en lo que al movimiento radial se refiere, dada por

$$E_{\mathrm{p,eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + E_{\mathrm{p}}(r).$$

Por otro lado, definiendo el *potencial de energía centrífuga* como

$$E_{\mathrm{p,c}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2},$$

la fuerza asociada al potencial centrífugo, estaría dada por

$$F_{\mathrm{c}}(r) = -\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p,c}}(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{L^2}{mr^3} > 0.$$

Como $F_{\mathrm{c}} > 0$, la fuerza asociada al potencial centrífugo apunta hacia afuera del origen, es decir, es una *fuerza centrífuga*.

Aunque se ha llegado a este resultado, realmente ninguna fuerza centrífuga actúa sobre la partícula, pues se consideró inicialmente que la única fuerza que actúa sobre la partícula se debe al potencial real $E_{\mathrm{p}}(r)$ asociado a la fuerza central, en el caso de que este sea repulsivo.

Por ello, se puede concluir que la fuerza centrífuga F_{c} es sólo un concepto matemáticamente útil. Físicamente, este concepto describe la tendencia de la partícula, de acuerdo con la ley de inercia, a moverse en línea recta evitando hacerlo en curva.

Por lo anterior, la ecuación (3.31) adquiere la forma

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + E_{\mathrm{p,eff}}(r). \tag{3.32}$$

Mediante la ecuación (3.32), luego de separar variables, se llega a

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\mathrm{o}}}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{\{E - E_{\mathrm{p,eff}}(r)\}^{1/2}} = t. \tag{3.33}$$

Mediante la ecuación (3.33) es posible obtener $r(t)$, es decir, se obtiene la solución completa del problema dinámico en lo que se refiere al movimiento radial, donde se ha tenido en cuenta únicamente la conservación de la energía.

Para el movimiento en la dirección transversal, se tiene en cuenta la conservación del momento angular, donde es válida la expresión

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{mr^2},$$

donde al separar variables e integrar se encuentra para la posición angular

$$\theta = \theta_{\mathrm{o}} + \int_{t_{\mathrm{o}}}^{t}\frac{L}{mr^2}\mathrm{d}t. \tag{3.34}$$

Finalmente al reemplazar la expresión para $r(t)$ obtenida mediante la ecuación (3.33), es posible conocer la solución radial, $\theta(t)$.

En síntesis, las ecuaciones (3.33) y (3.34) permiten resolver completamente el problema dinámico de una partícula sometida a una fuerza central conservativa.

Para conocer la ecuación de la trayectoria, por medio de las ecuaciones paramétricas $r(t)$ y $\theta(t)$ se encuentra la expresión de la forma $r(\theta)$.

En forma inversa, partiendo de la ecuación de la trayectoria es posible determinar la fuerza que actúa sobre la partícula.

Por lo analizado en esta sección, se tiene que cuando el movimiento se debe a una fuerza central se hace necesario considerar la conservación de la energía para la parte radial y la conservación del momento angular para la parte transversal, ya que la conservación de la energía no permite conocer dirección por tratarse de una cantidad escalar. Esto es diferente al caso de movimiento rectilíneo donde la conservación de la energía es suficiente para resolver el problema, pues de antemano la dirección está dada.

PREGUNTAS

1. Una persona levanta verticalmente un cuerpo, hasta una posición determinada. ¿Qué se puede decir del trabajo neto realizado sobre el cuerpo, cuando este asciende con velocidad constante y cuando lo hace con aceleración constante? ¿Por qué?
2. Dos cuerpos de masas m_1 y m_2 ($m_1 > m_2$) tienen el mismo momento lineal. ¿Sobre cuál se debe realizar mayor trabajo para detenerlo? Justifique su respuesta.
3. Un pasajero lanza un cuerpo en el interior de un auto, en movimiento respecto a la vía. Para cualquier observador, ¿la energía cinética del cuerpo, siempre depende de la velocidad del auto? ¿Por qué?
4. Desde la terraza de un edificio, una persona lanza simultáneamente dos cuerpos de igual masa y con velocidades de igual magnitud. Si un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba y el otro verticalmente hacia abajo, ¿qué se puede decir de sus velocidades en la parte más baja del edificio?
5. Dos cuerpos de igual masa, se mueven sobre la misma trayectoria circular pero en sentidos opuestos. Si las velocidades de los cuerpos tienen igual magnitud, ¿qué se puede afirmar al comparar sus energías cinéticas? ¿Por qué?
6. Un cuerpo, con movimiento circular uniforme, se mueve en un plano vertical. ¿Se conserva la energía del cuerpo? Justifique su respuesta.
7. El momento lineal total de un sistema aislado, formado por dos cuerpos, es cero. ¿Significa esto que la energía cinética total del sistema sea nula? ¿Por qué?
8. Dos partículas chocan elásticamente. ¿Esto quiere decir que la energía cinética de cada partícula permanece constante? Justifique su respuesta.
9. Un futbolista patea un balón desde la superficie de la tierra, de tal manera que su velocidad inicial forma un ángulo diferente de cero con la horizontal. a) En el instante que el balón regresa a tierra, ¿qué trabajo neto realizó el peso sobre el balón? Justifique su respuesta. b) ¿Cambia el resultado anterior, si se considera la fricción que el aire ejerce sobre el balón? ¿Por qué? c) ¿Qué diferencia se presenta cuando se compara la energía de salida con la energía de llegada del balón, si se tiene en cuenta o no la fuerza de fricción? ¿Por qué?
10. Una persona ejerce a una fuerza horizontal constante sobre un bloque. Sabiendo que el cuerpo se mueve con velocidad constante sobre una superficie horizontal, ¿qué se puede afirmar, respecto a la existencia o no de fricción entre las superficies en contacto? Justifique su respuesta.
11. Sobre un cuerpo en movimiento actúan simultáneamente cuatro fuerzas, dos de las cuales son conservativas. En este caso a) ¿Se puede hablar de conservación de la energía? ¿Por qué? b) ¿Se puede hablar de energía potencial? ¿Por qué?
12. Un oscilador armónico clásico, tiene una energía total de 10J. ¿En este caso se presentan regiones clásicamente prohibidas? Justifique su respuesta.